

Lamberts Problem

Ulysse McConnell

5. Februar 2022

Übersicht

Problemstellung

Lamberts Problem

Parameter

Lösung

Lagrange-Gleichung

Bisektion

Konstruktion

Geschwindigkeit

Anwendung

Johann Heinrich Lambert

Johann Heinrich Lambert

Schweizer Mathematiker, Physiker, Astronom und Philosoph.

* August 1728, Mühlhausen

† September 1777, Berlin

- Autodidaktisches Studium
- Gründungsmitglied der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
- Mitglied der Preußischen AdW



└ Johann Heinrich Lambert

Johann Heinrich Lambert

Schweizer Mathematiker, Physiker, Astronom und Philosoph.

• August 1728, Mühlhausen
† September 1777, Berlin

- Autodidaktisches Studium
- Gründungsmitglied der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
- Mitglied der Preußischen AdW



- Lambert muss früh (mit 12 Jahren) in der Schneiderei seines Vaters helfen und kann deshalb die Schule nicht mehr besuchen
- Reist als Hauslehrer durch Europa
- 1758: Mitbegründer der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, damals die „*Churfürstliche Akademie der Wissenschaften*“
- 1764: Wird auf Vorschlag Leonhard Eulers Mitglied der Preußischen Akademie der Wissenschaften
→ Kontakt zu Euler, Lagrange, ...

Einige Errungenschaften:

- 1761: Beweis der Irrationalität von π
- 1761: „Cosmologische Briefe“
→ Moderne Kosmosvorstellung
- 1766: „Theorie der Parallelinien“
→ Rigorose Weiterentwicklung der nichteuklidischen (hyperbolischen) Geometrie

└ Johann Heinrich Lambert

Einige Errungenschaften:

- 1761: Beweis der Irrationalität von π
- 1761: „Cosmologische Briefe“
→ Moderne Kosmosvorstellung
- 1766: „Theorie der Parallelinien“
→ Rigorose Weiterentwicklung der nichteuklidischen (hyperbolischen) Geometrie

- Beweis der Irrationalität von π über Kettenbrüche
- Stellt in den „*Cosmologische[n] Briefen*“ ein modernes kosmologisches Verständnis auf, wonach der gesamte Kosmos aus Ansammlungen von Galaxien, ähnlich der Milchstraße, bestehe
- Studium von Hyperbelfunktionen (\sinh , \cosh , \tanh) und Beweis vieler Sätze der nichteuklidischen Geometrie

Problemstellung

Lamberts Problem: Früher

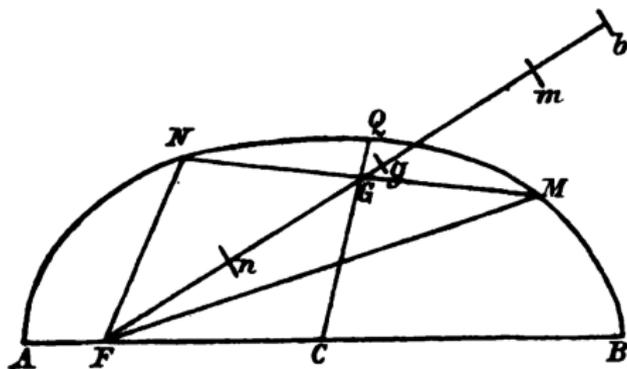


Fig2. 3.

„Es sei die grosse Axe AB , die Summe der Radienvectoren $FN + FM$ und die Sehne MN gegeben; man soll die Zeit finden, in welcher der Bogen NM durchlaufen wird.“

— Johann H. Lambert,
§210 Abhandlungen zur Bahnbestimmung der Cometen (1761)

Lamberts Problem

└ Problemstellung

└ Lamberts Problem

└ Lamberts Problem: Früher



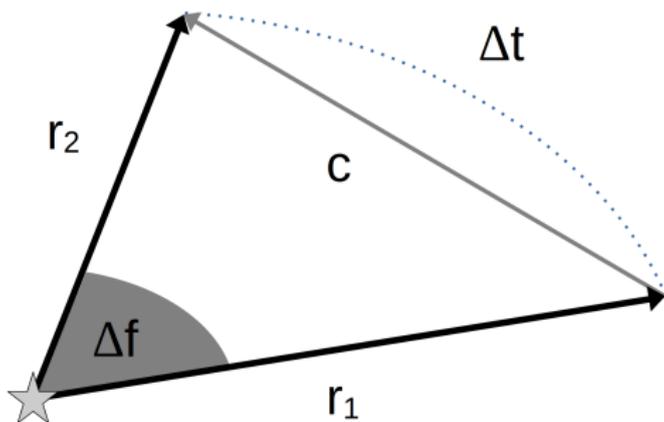
Fig. 3.

„Es sei die grosse Axe AB , die Summe der Radienvektoren $FN + FM$ und die Sehne MN gegeben; man soll die Zeit finden, in welcher der Bogen NM durchlaufen wird.“

— Johann H. Lambert,
[210 Abhandlungen zur Bahnbestimmung der Cometen (1761)]

- Schon Newton beschäftigte sich im Buch III der „*Principia Mathematica*“ mit der Bahnbestimmung von Kometen anhand **dreier** Beobachtungen
- Auch Euler, der in Kontakt mit Lambert stand, stellte Überlegungen zur Bahnbestimmung an
- Lambert lieferte *keinen wirklichen Beweis* für sein Problem, sondern eher graphische Begründungen
- Erst Lagrange konnte Lamberts Problem beweisen
(s. [▶ Lagrange Gleichung](#))

Lamberts Problem: Heute



Definition

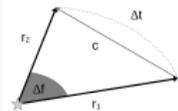
Umlaufbahnbestimmung anhand zweier Punkte R_1 und R_2 und einer Flugzeit ΔT .

Lamberts Problem

└ Problemstellung

└ Lambert's Problem

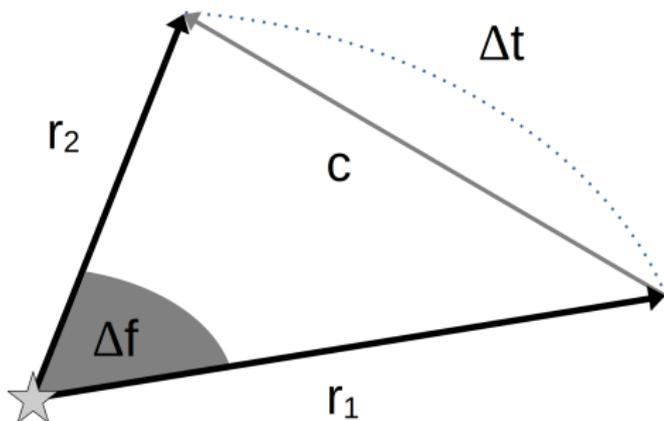
└ Lambert's Problem: Heute

**Definition**

Umlaufbahnbestimmung anhand zweier Punkte R_1 und R_2 und einer Flugzeit ΔT .

- Heutige Formulierung als Umkehrung des ursprünglichen Problems von Lambert
- Neuentdeckung während des Wettlaufs ins All (*Space Race*)
- Anwendung in moderner Himmelsmechanik zur Planung von interplanetären Missionen, Raketenabwehr, ...

Parameter: Sehne



$$c^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\Delta f)$$

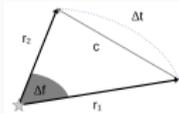
$$c = \|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|$$

Lamberts Problem

└ Problemstellung

└ Parameter

└ Parameter: Sehne



$$c^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\Delta f)$$
$$c = \|r_2 - r_1\|$$

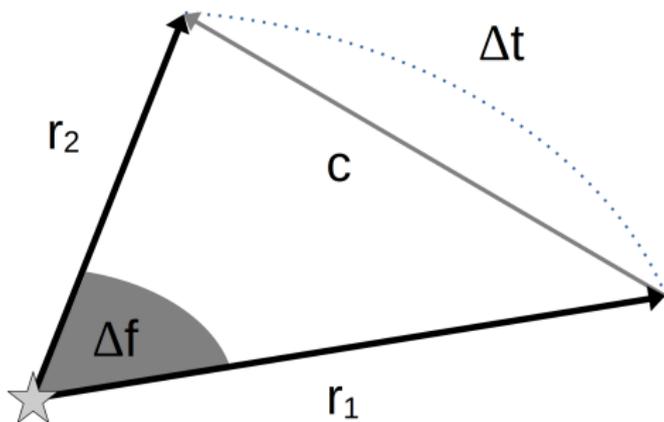
- Länge der Sehne über den Kosinussatz:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

oder über die Differenz der Radienvektoren:

$$c = \|\vec{a} - \vec{b}\|$$

Parameter: Semiperimeter



Definition

Semiperimeter s (Halber Umfang):

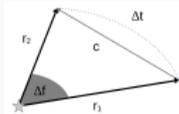
$$s = \frac{r_1 + r_2 + c}{2}$$

Lamberts Problem

└ Problemstellung

└ Parameter

└ Parameter: Semiperimeter



Definition

Semiperimeter s (Halber Umfang):

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

- Nicht zu Verwechseln mit **parameter**
- Semiperimeter := Halber Umfang
(lat. *semi* - halb, *perimeter* - Umfang)
- Semiperimeter nicht bei Lambert erwähnt, aber nützliche Größe in der Formulierung von Lagrange
- Keine zusätzliche Größe, sondern nur Vereinfachung/Zusammenfassung der anderen Größen

Lösung

Lagrange-Gleichung

$$\Delta t = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \cdot [(\alpha - \beta) - (\sin\alpha - \sin\beta)]$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{s}{2a}} \quad \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{s-c}{2a}}$$

Lamberts Problem

└ Lösung

└ Lagrange-Gleichung

└ Lagrange-Gleichung

$$\Delta t = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \cdot [(\alpha - \beta) - (\sin \alpha - \sin \beta)]$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{x}{2a}} \quad \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{x-c}{2a}}$$

- Große Halbachse a , Gravitationsparameter $\mu (= GM)$
- Beweis der Hypothese Lamberts im Jahr 1773 durch den Mathematiker Joseph-Louis Lagrange
- Möglichkeit der Formulierung einer Laufzeit-Gleichung anhand der drei geometrischen Elemente (große Halbachse, zwei Radienvektoren) beweist die Vermutung Lamberts
- Umkehrung der Gleichung rechnerisch aufwändig; andere Methoden, zB. Näherung durch Kettenbrüche, sind möglich (s. <https://arxiv.org/pdf/2104.05283.pdf>)

Graphischer Verlauf i

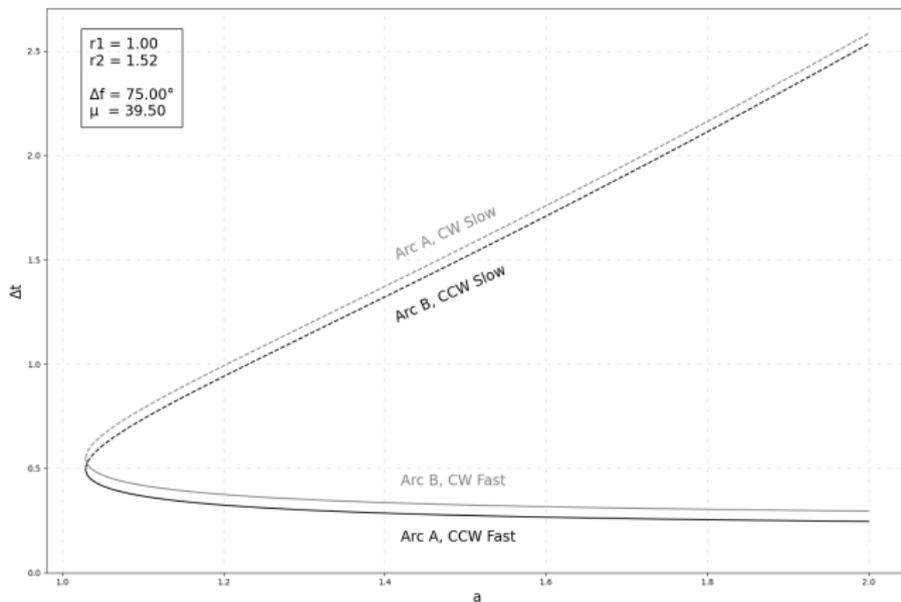


Abbildung 1: Graphischer Verlauf der Lagrange-Gleichung

Lamberts Problem

└ Lösung

└ Lagrange-Gleichung

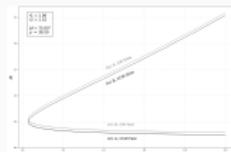
└ Graphischer Verlauf i 

Abbildung 1: Graphischer Verlauf der Lagrange-Gleichung

- Abbildung von großer Halbachse a auf Transferzeit Δt
- Vier verschiedene Transferzeiten erkennbar
→ Vier mögliche Transfers sind möglich, aber nur einer mit gesuchten Zeit (s. [Konstruktion](#))
- Möglichkeiten ergeben sich aus Uneindeutigkeit von Sinus und Cosinus (zB. $\sin 45^\circ = \sin 135^\circ$)
- Aus der Periodizität der trigonometrischen Funktionen ergeben sich außerdem unendlich viele Lösungen. Diese entsprechen Transfers mit mehreren Umrundungen (*multi-revolution transfers*)

Graphischer Verlauf ii

Gesucht:

Große Halbachse

Problem 1:

Abbildung auf die falsche Größe

→ Umkehrabbildung gesucht

Problem 2:

Umkehrung der Lagrange-Gleichung nicht trivial

Lösung

Numerisches Näherungsverfahren



Animation 1: Bisektions Algorithmus

(© Ralf Pfeifer, CC BY-SA 3.0, commons.wikimedia.org)

└ Lösung

└ Bisektion

└ Bisektion

- Nullstellensuche durch Intervallhalbierung (= Bisektion)
- Voraussetzung: Funktion ist auf dem Suchintervall streng monoton
- Beispiel: $\sqrt{2}$ durch geschicktes Raten annähern
($[1;2] \rightarrow [1, 1.5] \rightarrow [1.25, 1.5] \rightarrow \dots$)
- Weitere Möglichkeit: Newton-Raphson Iteration (schneller)

Nachteile:

- Ableitung (nicht trivial) benötigt
- Konvergenz nicht garantiert
- Bisektion langsamer, aber simpler und konvergiert sicher

Konstruktion i

Bekannt:

- Große Halbachse (durch ► Bisektion)
- Einer der beiden Brennpunkte (Zentralkörper)
- Zwei Punkte auf der Ellipse (R_1 und R_2)

Definition

Ellipseneigenschaft: $r_1 + r_2 = 2a$

Folgerung

Kreise mit Radius $2a - r_n$ (Abstand zum ges. Brennpunkt) um jeweilige Punkte R_1 und R_2 schneiden sich im gesuchten zweiten Brennpunkt.

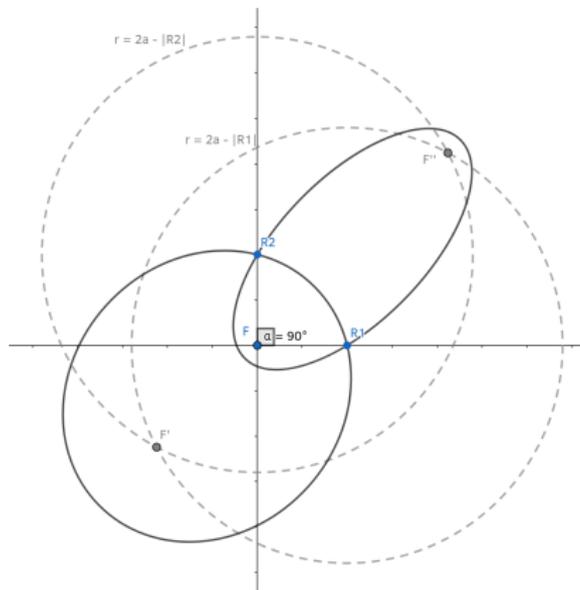


Abbildung 2: Konstruktion

(online: [geogebra.org/m/w4uycw6x](https://www.geogebra.org/m/w4uycw6x))

Kleinstmögliche Halbachse:

Beide Konstruktionskreise berühren sich.

$$\begin{aligned} \text{Radius}_1 + \text{Radius}_2 &= \overline{R_1 R_2} \\ 2a_{min} - r_1 + (2a_{min} - r_2) &= c \\ a_{min} &= \frac{r_1 + r_2 + c}{4} \end{aligned}$$

└ Lösung

└ Konstruktion

└ Konstruktion iii

Kleinstmögliche Halbachse:

Beide Konstruktionskreise berühren sich.

$$\begin{aligned} \text{Radius}_1 + \text{Radius}_2 &= \overline{P_1 P_2} \\ 2a_{\min} - r_1 + (2a_{\min} - r_2) &= c \\ a_{\min} &= \frac{r_1 + r_2 + c}{4} \end{aligned}$$

- Kleinstmögliche Halbachse wenn Konstruktionskreise sich berühren
 - Summe der Radien = Abstand der Mittelpunkte
 - Abstand der Mittelpunkte gleichzeitig Sehne
- a_{\min} ist längster Transferzeit auf der kurzen Strecke (s. ▶ Graphischer Verlauf)
 - Ab einer längeren Transferzeit muss ein längerer Transferweg verwendet werden

Transfergeschwindigkeit

Transfergeschwindigkeit

Bestimmung über vis-viva-Gleichung:

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

Startgeschwindigkeit

Einsetzen von r_1 für r

- Planung interplanetarer Flüge
- Planung Rendezvous-Manöver
- Raketenabwehr
- ...

Vielen Dank!



umcconnell.net/lamberts-problem



CC BY-NC-SA 4.0

Bisektions-Algorithmus

Methode BISEKTION($f, a, b, \text{ziel} = 0, N = 100$)

$y \leftarrow 0$

für $i \leftarrow 1, N$ **tue**

$m \leftarrow (a + b)/2$

▷ Halbierung des Intervalls

$y \leftarrow f(m) - \text{ziel}$

wenn $y \approx \text{ziel}$ **dann**

Ausgabe m ; **Fertig**

sonst wenn $f(a) - \text{ziel}$ gl. Vorzeichen wie y **dann**

$a \leftarrow m$

sonst

$b \leftarrow m$

Ausgabe m

▷ Näherung ausgeschöpft

Weiterführende Lektüre



Johann H. Lambert

Abhandlungen zur Bahnbestimmung der Cometen

Verlag von Wilhelm Engelmann, 1902



Richard H. Battin.

An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics.

AIAA, 1999.



Matthew M. Peet.

Lecture 10: Rendezvous and Targeting - Lambert's Problem.

AEE 462: Spacecraft Dynamics and Control, 2021