
EINFÜHRUNG IN LAMBERTS PROBLEM

W-SEMINAR

Ulysse McConnell *

Himmelsmechanik und Raumfahrt

ulyссе@umcconnell.net

9. November 2021

ABSTRAKT

Navigation ist ein zentrales und erstaunlicherweise kompliziertes Problem der Himmelsmechanik, da Objekte sich nur auf keplerschen Umlaufbahnen um Zentralkörper bewegen können. Dabei ist auch aus diversen Gründen ein optimaler Ressourcenverbrauch der Energie (in Form von Treibstoff), der Zeit, etc. erwünscht.

Lamberts Problem, benannt nach dem schweizer Mathematiker Johann Lambert, besteht in der Bestimmung der Energie-optimalen Trajektorie zwischen zwei Punkten im Raum anhand einer vorgegeben Zeitdifferenz Δt . Lambert postulierte, dass für eine solche Lösung nur die beiden Positionsvektoren des Ausgangs- und Endpunktes sowie die Zeitdifferenz bekannt sein müssen.

Die nachfolgende Gleichung zur Lösung dieses Problems, die auf den italienisch-französischen Mathematiker Joseph-Louis Lagrange zurückgeht, wird in der Arbeit erläutert:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} [(\alpha - \beta) - (\sin \alpha - \sin \beta)]$$

Diese Arbeit versucht eine möglich umfassende, verständliche und kurze Übersicht über Lamberts Problem zu geben. Aus Gründen der Komplexität wird in dieser Arbeit nur die elliptische Lösung zu Lamberts Problem betrachtet. Außerdem werden Bahnstörungen wie die Erdabplattung o.ä. nicht mit einbezogen.

Schlüsselwörter Lamberts Problem · Orbitbestimmung · Himmelsmechanik

*Web: <https://www.umcconnell.net/>

Inhaltsverzeichnis

1 Definitionen u. Notation	3
2 Lamberts Problem	3
2.1 Problemstellung	3
2.2 Geschichte	4
2.3 Johann H. Lambert	5
3 Lösung	5
3.1 Lagrange Formel	5
3.2 Bisektion	6
3.3 Graphische Konstruktion	7
3.4 Kurze und Lange Transferzeit	8
3.5 Kleinste Halbachse	9
3.6 Geschwindigkeit	9
4 Anwendung	9
4.1 Allgemein	9
4.2 Rechenbeispiel	10
A Formelsammlung	12
B Trigonometrische Identitäten	18
C Formeln und Beweise	21
C.1 Lagrange Formel	21
C.2 Weitere Parameter	22
C.3 Umlaufzeit	25
C.4 Geschwindigkeit	27
D Python Implementierung	31
Literatur	35

Abbildungsverzeichnis

1 Geometrie des Problems	4
2 Transferzeit in Abhängigkeit von großer Halbachse a	6
3 Konstruktion der Transferellipsen anhand der großen Halbachse a	8
4 Skizze des berechneten Erde-Mars-Transfers	11
5 Exzentrische Anomalie und Wahre Anomalie	13

Tabellenverzeichnis

1 Winkel für verschiedene Trajektorien	26
--	----

Algorithmusverzeichnis

1 Bisektions-Algorithmus	7
------------------------------------	---

Navigation ist ein zentrales und erstaunlicherweise kompliziertes Problem der Himmelsmechanik, da Objekte sich nur auf keplerschen Umlaufbahnen um Zentralkörper bewegen können. Dabei ist auch aus diversen Gründen ein optimaler Ressourcenverbrauch der Energie (in Form von Treibstoff), der Zeit, etc. erwünscht.

Lamberts Problem, benannt nach dem schweizer Mathematiker Johann Lambert, besteht in der Bestimmung der Energie-optimalen Trajektorie zwischen zwei Punkten im Raum anhand einer vorgegebenen Zeitdifferenz Δt . Lambert postulierte, dass für eine solche Lösung nur die beiden Positionsvektoren des Ausgangs- und Endpunktes sowie die Zeitdifferenz bekannt sein müssen.

Die nachfolgende Gleichung zur Lösung dieses Problems, die auf den italienisch-französischen Mathematiker Joseph-Louis Lagrange zurückgeht, wird in der Arbeit erläutert:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} [(\alpha - \beta) - (\sin \alpha - \sin \beta)]$$

Diese Arbeit versucht eine möglichst umfassende, verständliche und kurze Übersicht über Lamberts Problem zu geben. Aus Gründen der Komplexität wird in dieser Arbeit nur die elliptische Lösung zu Lamberts Problem betrachtet. Außerdem werden Bahnstörungen wie die Erdabplattung o.ä. nicht mit einbezogen.

1 Definitionen u. Notation

Folgende Parameter werden in dieser Arbeit verwendet:

Masse: M (Zentralkörper) und m (Satellit)	Gravitationsparameter: μ	Sehne: c
Numerische Exzentrizität: e	Große Halbachse: a	Kleine Halbachse: b
Zeit: t	Umlaufzeit: T	Zeitpunkt: t_n
Wahre Anomalie: f oder θ	Mittlere Anomalie: M_e	
Distanz zwischen Punkt und Zentralkörper: r_n	Position bzw. Punkte: P_n	

Wo nicht anders angegeben, handelt es sich bei den Parametern um Skalare. Vektoren werden wie folgt mit einem Pfeil gekennzeichnet: \vec{F}

2 Lamberts Problem

2.1 Problemstellung

Lamberts Problem bezeichnet die Bestimmung einer Umlaufbahn um einen Zentralkörper anhand zweier Positionsmessungen und der dazugehörigen Flugzeit Δt zwischen diesen Punkten [TF21]. Diese Geometrie ist in Abbildung 1 erkennbar.

Hierbei handelt es sich um das Lösen des Zweikörperproblems mit einer vernachlässigbar kleinen Satellitenmasse und begrenzten Informationen in Form zweier Messungen.

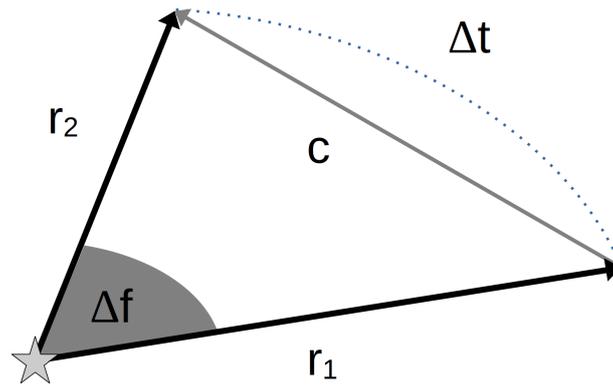


Abbildung 1: Geometrie des Problems

Bei der Berechnung wird zusätzlich die Sehne c zwischen den Punkten P_1 und P_2 gebraucht. Die Länge dieser Sehne muss aber nicht zusätzlich gemessen werden, sie ergibt sich aus dem Kosinussatz:

$$\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^2 = c^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\Delta f) \quad (2.1)$$

Außerdem wird der Semiperimeter als Hilfsgröße s definiert, der dem halben Umfang des eingeschlossenen Dreiecks entspricht:

$$s = \frac{r_1 + r_2 + c}{2} \quad (2.2)$$

2.2 Geschichte

Die Geschichte des Problems von Lambert findet ihren Ursprung in der Bahnbestimmung von Kometen. Denn der Anblick von Kometen am Nachthimmel ist nicht nur für Laien etwas besonderes, auch Physiker interessieren sich für diese Phänomene.

Schon Isaac Newton beschäftigte sich mit der Bahnbestimmung von Kometen. Im Buch III seiner Principia Mathematica lautet Problem 21: „Cometae in parabola moti trajectoryam ex datis tribus observationibus determinare“² [New26].

Auch Leonhard Euler setzte sich mit diesem Problem auseinander. In den Jahren 1743 und 1744 stellte er anhand der Überlegungen von Newton weitere Formeln auf. Außerdem stand Euler in engem Kontakt mit Johann Lambert [Alb19].

Im Jahr 1761 veröffentlichte Johann Lambert sein Buch über die Bahnbestimmung von Kometen, das zum ersten Mal das nach ihm benannte Problem beschreibt. In §210 schreibt Lambert zu einer Skizze einer Ellipse durch zwei Punkte M und N : „Es sei die grosse Axe AB , die Summe der Radienvectoren $FN + FM$ und die Sehne MN gegeben; man soll die Zeit finden, in welcher der Bogen NM durchlaufen wird.“ [Lam02]. In Folge beschreibt er eine ähnliche Formel wie Euler sie zuvor beschrieben hatte. Lambert wandte diese Formel zwar besser auf Kometen an als Euler, lieferte aber keinen wirklichen Beweis für seine Theorie, sondern eher graphische Begründungen [Vol80].

Der Mathematiker Joseph-Louis Lagrange bewies 1773 als Erster die Hypothese Lamberts rigoros (siehe Anhang C). Lagrange lobte Lambert in höchsten Tönen für diese Entdeckung und schrieb dazu in seinen Memoiren: „[...] Théorème qui, par sa simplicité et par sa généralité, doit être regardé comme une des plus ingénieuses découvertes qui aient été faites dans la Théorie du système du monde;“³ [Lag69].

²Die Bestimmung der Bahn eines sich auf einer Parabel bewegendem Kometen anhand dreier gegebener Beobachtungen.

³[...] das Theorem, welches durch seine Einfachheit und Allgemeinheit als eine der raffiniertesten Entdeckung in der Theorie über das System des Kosmos gelten muss.

Nach Lagrange lieferte auch Gauss [Gau09] einen ähnlichen Beweis für Lamberts Problem. In den folgenden Jahrhunderten beschäftigten sich immer wieder Mathematiker wie Laplace oder Hamilton [Alb19] mit dem Problem und lieferten neue Beweismethoden.

Seit dem Wettlauf ins All hat Lamberts Problem wieder an Bedeutung gewonnen, vor allem in „umgekehrter“ Richtung zur Planung von Flugbahnen anhand vorgegebener Zeiten.

2.3 Johann H. Lambert

Johann Heinrich Lambert war ein schweizer Mathematiker, Physiker, Astronom und Philosoph. Er wurde am 26. August 1728 in Mülhausen (damals Schweizer Gebiet) geboren und starb am 25. September 1777 in Berlin im Alter von 49 Jahren. Besonders bekannt ist Lambert für seinen bemerkenswerten Beweis der Irrationalität von π und seinen Beiträgen zur Photometrie [Bri21].

Als Sohn eines Schneiders, der früh im Geschäft seines Vaters aushelfen musste, brachte Lambert sich im autodidaktischen Studium seine mathematischen und philosophischen Fähigkeiten selbst bei. Lambert war Gründungsmitglied der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, bevor er auf Empfehlung Leonhard Eulers 1764 Mitglied der Preußischen Akademie der Wissenschaften in Berlin wurde [Str17].

Auch im Bereich der Astronomie war Lambert aktiv. Neben seinen Gedanken zur Bahnbestimmung von Kometen, zeichnet Lambert 1761 in seiner Sammlung „Cosmologische Briefe“ ein nach heutigem Wissen äußerst modernes Bild des Weltalls. Dieses endliche Universum bestehe aus Galaxien und Ansammlungen von Sternen, die alle jeweils um einen extrem massereichen Zentralkörper rotieren [OR04].

3 Lösung

3.1 Lagrange Formel

Zur Lösung des Problems von Lambert gab und gibt es bis heute viele unterschiedliche Lösungsansätze. Ziel ist es immer, eine Gleichung aufzustellen, die nur von einem Parameter der Lösungsellipse abhängt, nach dem dann aufgelöst werden kann. Torre Sangrà und Fantino [TF21] haben in ihrer Untersuchung sechs bis sieben unterschiedliche Ansätze identifiziert.

Eine mögliche Wahl des Parameters ist die große Halbachse a der gesuchten Transferellipse. Es lässt sich folgende Formel für die Abhängigkeit von Transferzeit und großer Halbachse herleiten (eine ausführliche Herleitung aller Formel und Parameter ist in Anhang C zu finden):

$$\Delta t = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} [(\alpha - \beta) - (\sin \alpha - \sin \beta)] \quad (3.1)$$

Die Parameter α und β sind anhand der Sehne c (2.1) und des Semiperimeters s (2.2) definiert:

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{s}{2a}} \quad \leftrightarrow \quad \alpha = 2 \cdot \arcsin\left(\sqrt{\frac{s}{2a}}\right) \quad (3.2a)$$

$$\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{s-c}{2a}} \quad \leftrightarrow \quad \beta = 2 \cdot \arcsin\left(\sqrt{\frac{s-c}{2a}}\right) \quad (3.2b)$$

Abbildung 2 zeigt einen Graphen der Lagrange Formel (3.1) mit der Transferzeit in Abhängigkeit von a . Aus der Abbildung kann abgelesen werden, dass die Zuordnung von a zu Δt nicht eindeutig ist. Es gibt also meistens vier Lösungen zu jeder Halbachse. Die unteren Äste der Abbildung zeigen die kurzen Wege auf beiden Transferellipsen, die oberen Äste die langen, entgegengesetzten Wege.

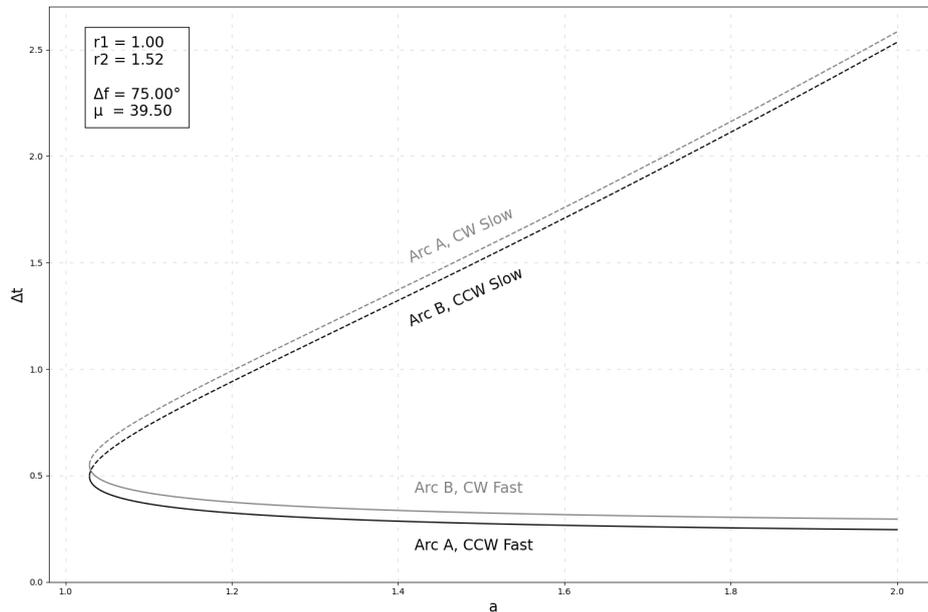


Abbildung 2: Transferzeit in Abhängigkeit von großer Halbachse a

Dies liegt zum einen an der Uneindeutigkeit der umgekehrten trigonometrischen Funktionen: die Sinusfunktion ist periodisch, und es gibt unendlich viele Lösungen für den arcsin. Dies spiegelt die Tatsache wider, dass auch beliebig viele zusätzliche Vollumrundungen bis zum Erreichen des Ziels denkbar sind. In Abschnitt 3.3 wird bei der Konstruktion deutlich, dass auch ohne zusätzliche Umrundungen meistens zwei Lösungen möglich sind.

Zum anderen ist der Winkel zwischen den Ausgangsvektoren nicht klar definiert. Der kleinere eingeschlossene Winkel, und damit die kürzere Strecke, wurde bislang implizit angenommen, doch es ist auch die andere Richtung über den umschließenden Winkel denkbar. Mehr dazu im Abschnitt 3.4.

Im folgenden Abschnitt wird nur ein einzelner Ast und die kürzeste Verbindung betrachtet werden. In Anhang C.3 wird die genaue Herleitung der unterschiedlichen Äste behandelt.

3.2 Bisektion

Die Lagrange Formel löst zwar Lamberts ursprüngliche Problemstellung, doch sie ist in dieser Form zur Bestimmung von Bahnen ungeeignet. Dazu müsste die Zeit auf die große Halbachse abgebildet werden, nicht umgekehrt. Ohne die Formel umstellen zu müssen, kann aber dennoch eine Lösung durch ein numerisches Näherungsverfahren gefunden werden, zum Beispiel durch Bisektion.

Der Bisektionsalgorithmus, auch Intervallhalbierungsmethode genannt, wird wegen seiner langsamen Konvergenz oft ungern benutzt. Er findet aber trotzdem Verwendung zur Lösung des Problems von Lambert, unter anderem bei Peet [Pee21] und Bate u. a. [BMW71]. Einige Vorteile des Bisektionsalgorithmus sind seine Simplität und seine numerische Stabilität. Andere Näherungsverfahren, wie die Newton-Methode, konvergieren zwar deutlich schneller, konvergieren aber nicht garantiert auf eine Nullstelle. Für die Newton-Methode wird außerdem die Ableitung der Ausgangsfunktion benötigt, was im Fall der Lagrange Formel (3.1) nicht trivial ist.

Ein bekanntes Beispiel für die Verwendung der Intervallhalbierung ist die Annäherung an $\sqrt{2}$ durch gezieltes Ausprobieren und Quadrieren von Zahlen. So kann ein Anfangs gewählter Zahlenbereich, zum Beispiel zwischen 1 und 2, sukzessive halbiert und auf eine beliebige Genauigkeit von $\sqrt{2}$ eingengt werden.

Hierbei ist zu beachten, dass die Bisektion nur bei Funktionen konvergiert, die im betrachteten Intervall streng monoton sind. Dies liegt an der Voraussetzung eines Vorzeichenwechsels an der Nullstelle, um Werte als kleiner oder größer als die gesuchte Nullstelle einordnen zu können. Bei der Lagrange Formel ist dies glücklicherweise der Fall (vgl. Abbildung 2)

Algorithmus 1 Bisektions-Algorithmus

Bedingung: $f(x)$ ist im Intervall $[a; b]$ streng monoton

Bedingung: $a < b$

Bedingung: $N > 0$

```

1: Methode BISEKTION( $f, a, b, ziel = 0, N = 100$ )
2:    $y \leftarrow 0$ 
3:   für  $i \leftarrow 1, N$  tue
4:      $m \leftarrow (a + b)/2$ 
5:      $y \leftarrow f(m) - ziel$ 
6:     wenn  $y$  nahe genug an  $ziel$  dann
7:       Ausgabe  $m$ 
8:       Fertig
9:     sonst wenn  $f(a) - ziel$  gleiches Vorzeichen wie  $y$  dann
10:       $a \leftarrow m$ 
11:     sonst
12:       $b \leftarrow m$ 
13:     Ende wenn
14:   Ende für
15:   Ausgabe  $m$ 
16: Ende Methode

```

3.3 Graphische Konstruktion

Nachdem die große Halbachse bestimmt worden ist, beispielsweise mit oben beschriebenem Verfahren, lässt sich die Lösungselipse der gesuchten Bahn graphisch konstruieren. Diese Konstruktion wird unabhängig unter anderem bei Gauss [Gau09], Peet [Pee21] und Battin [Bat99a] beschrieben.

Bei der Konstruktion wird die Eigenschaft einer Ellipse ausgenutzt, dass die Abstände eines Punktes auf der Ellipse konstant sind und $2a$ betragen. Da ein Brennpunkt, der Zentralkörper, bereits bekannt ist, wird nun der zweite, leere Brennpunkt gesucht.

Der Abstand eines Punktes r_p zu seinem Zentralkörper, und damit der Abstand eines Punktes zu einem der Brennpunkte der Ellipse, ist bekannt. Da jener gesuchte zweite Brennpunkt sich im Abstand von $2a - r_p$ befinden muss, wird jeweils ein Kreis mit ebendiesem Radius um den Anfangs- und Endpunkt gezogen. Die Schnittpunkte dieser Kreise sind die gesuchten Brennpunkte.

Bei der Konstruktion werden vier mögliche Fälle erkennbar:

1. Keine Schnittpunkte: Für diese Halbachse gibt es keine Lösung; die Transferellipse ist zu klein, um Anfangs- und Endpunkt zu verbinden.
2. Unendlich viele Schnittpunkte: Beide Kreise überlappen sich, Anfangs- und Endpunkt müssen gleich sein. Somit ist kein Transfer nötig.

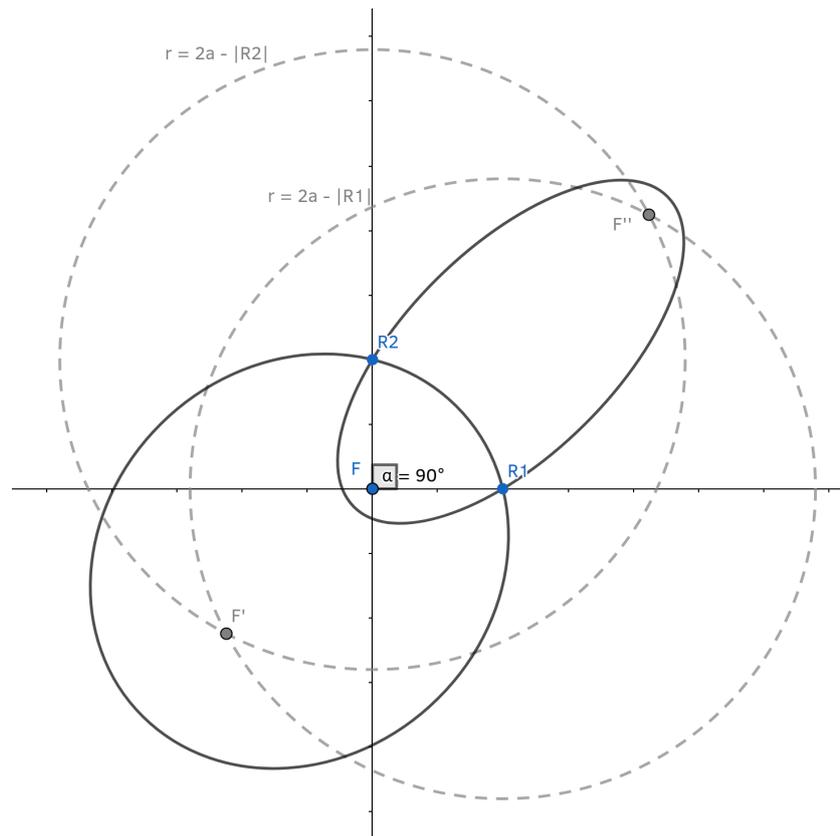


Abbildung 3: Konstruktion der Transferellipsen anhand der großen Halbachse a

Eine interaktive Version dieser Graphik ist im Internet auf GeoGebra unter folgender URI abrufbar:
<https://www.geogebra.org/m/w4uycw6x>

3. Zwei Schnittpunkte (vgl. Abbildung 3): Zwei Transferellipsen sind möglich. Insgesamt sind, wie in Abbildung 2 zu sehen ist, zwei Ellipsen mit je zwei Flugrichtungen denkbar. Je nach Bewegungssituation kann aber der eine oder andere Orbit energetisch günstiger sein.
4. Ein Schnittpunkt: Nur eine Transferellipse ist möglich.

3.4 Kurze und Lange Transferzeit

Zu Beachten ist zuletzt, dass jede Lösungselipse in Wahrheit zwei mögliche Routen repräsentiert, denn die Umlaufbahn kann nämlich in zwei Drehrichtungen befliegen werden (im und gegen den Uhrzeigersinn) [Jor64].

Nach dem dritten keplerschen Gesetz gilt für die Umlaufzeit:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu} \quad (3.3)$$

Mit einer Transferzeit von Δt auf der kurzen Strecke und der dazu ermittelten großen Halbachse a gilt für die Transferzeit $\Delta t'$ auf der entgegengesetzt laufenden langen Strecke (vgl. Abbildung 2):

$$\Delta t' = T - \Delta t = \sqrt{\frac{4a^3\pi^2}{\mu}} - \Delta t \quad (3.4)$$

Eine vollständige Auflistung der Formeln aller Flugzeiten ist in Anhang C.3 zu finden.

3.5 Kleinste Halbachse

Betrachtet man den letzten Ausgangsfall der Konstruktion mit nur einem Schnitt- bzw. Tangentialpunkt der Kreise genauer, fällt auf, dass die gewählte große Halbachse die kleinstmögliche sein muss. Wählt man die Halbachse kleiner, so schneiden sich die Konstruktionskreise nicht mehr, was der physikalischen Unerreichbarkeit des Zieles über diese Transferellipse entspricht.

Um einen mathematischen Ausdruck für die kleinstmögliche große Halbachse zu finden, ist folgende Überlegung hilfreich: Damit sich beide Kreise berühren, muss die Summe ihrer Radien gleich dem Abstand zwischen den Punkten R_1 und R_2 sein. Dieser Abstand wurde in der Erläuterung Lamberts' Problem als Sehne c definiert, womit sich folgender Ausdruck ergibt:

$$\begin{aligned} \text{Radius}_1 + \text{Radius}_2 &= \overline{R_1 R_2} \\ 2a_{min} - r_1 + (2a_{min} - r_2) &= c \\ a_{min} &= \frac{r_1 + r_2 + c}{4} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Die Abbildung 2 lässt außerdem erkennen, dass a_{min} gleichzeitig die längste Umlaufzeit der kurzen Verbindungsstrecken bedeutet. Ist die Flugzeit also länger als die bei a_{min} , so sollte eine lange Verbindungsstrecken gewählt werden (vgl. Python Implementierung D).

Liegen sich die Anfangs- und Endpunkt auf entgegengesetzten Seiten des Zentralkörpers gegenüber, ergibt sich mit a_{min} eine Hohmann-Ellipse, bei der Anfangs und Endpunkt im Perihel and Aphel des Zentralkörpers liegen.

3.6 Geschwindigkeit

Als letzter Aspekt kann die Geschwindigkeit eines Körpers auf einer Transferellipse betrachtet werden. Dies ermöglicht auch die Bestimmung einer Geschwindigkeitsänderung, die nötig wäre, um einen Körper auf diese Transferellipse zu bringen.

Die Geschwindigkeit auf einer Ellipse ist durch die Energieerhaltung mit der vis-viva Gleichung (A.28) gegeben:

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (3.6)$$

Zur Bestimmung der Anfangs- und Endgeschwindigkeit kann für r jeweils r_1 und r_2 eingesetzt werden. Eine Formel zur Berechnung von Geschwindigkeitsvektoren findet sich im Anhang C.4.

Die nötige Startgeschwindigkeit für den Transfer ergibt sich aus der Differenz zur schon vorhandenen Geschwindigkeit des Körpers:

$$\Delta v_1 = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{a} \right)} - v_{vorh} \quad (3.7)$$

4 Anwendung

4.1 Allgemein

Lamberts Problem wird in der modernen Raumfahrt sehr häufig benutzt. Zwar ist die ursprüngliche Idee der Bahnbestimmung von Kometen in den Hintergrund gerückt, es finden sich aber umso interessantere Anwendungen. Beispielsweise wird in der Planung von interplanetaren Flügen Lamberts Problem zur Entwicklung optimaler Flugbahnen benutzt, etwa um Rendezvous- oder Swing-By Manöver zu planen.

Im Folgenden werden einige Beispiele aus der aktuellen Forschung aufgezählt:

- Hennes u. a. [HIL16] kombinieren Lamberts Problem mit künstlicher Intelligenz und einem evolutionären Algorithmus um optimale Startzeiten für interplanetare Flüge in einem vorgegeben Startfenster zu finden.
- Liu und Juang [LJ16] berechnen mit einer auf den Gravitationseinfluss mehrerer Objekte erweiterten Variante des Problems von Lambert eine optimale Flugbahn zwischen Erde und Mars.
- MacLellan [Mac05] verwendet Lamberts Problem um Rendezvous-Manöver zu planen.
- Im militärischen Bereich wird Lamberts Problem zum Beispiel zur Abwehr von Interkontinentalraketen genutzt, die von einer Abwehrrakete an einem bestimmten Zeitpunkt vor dem Wiedereintritt in die Atmosphäre abgefangen werden müssen.
Burns und Scherock [BS04] nutzen Lamberts Problem um eine solche Abwehrrakete zu steuern und den Treibstoffverbrauch zu optimieren.

4.2 Rechenbeispiel

Eine Sonde soll von der Erde aus in 5 Monaten auf dem Mars landen. Vereinfacht wird ein 2D Sonnenzentriertes Koordinatensystem angenommen. Die Berechnungen funktionieren dank der Vektoren aber genauso gut im 3-dimensionalen Raum.

Die Position des Mars in 5 Monaten wird auf $(1.164AE, 0.977AE)$ bestimmt. Die Erde befindet sich zum aktuellen Zeitpunkt bei $(1AE, 0AE)$. Es soll die Transferellipse bestimmt werden, die die Sonde in der vorgegebenen Zeit zum Ziel bringt.

Lösung

Aus dem Skalarprodukt der Vektoren kann der Winkel zwischen den Positionen bestimmt werden; er beträgt ca. 40° . Die Sehne kann mit Gleichung (2.2) auf ca. $0.991AE$ bestimmt werden; der Semiperimeter beträgt ca. $1.755AE$.

Durch Bisektion kann die große Halbachse numerisch auf ca. $0.886AE$ angenähert werden:

```
#0  9.215770852606049
#1  5.046731657379503
#2  2.9622120597662303
#3  1.9199522609595936
...
#56 0.8864113099551667
```

Außerdem kann die benötigte Anfangsgeschwindigkeit der Raumsonde berechnet werden. Die Geschwindigkeit der Erde beträgt in Annahme einer Kreisbahn ca. $29.8 \frac{km}{s}$. Die vis-viva Gleichung ergibt für die Anfangsgeschwindigkeit der Raumsonde ca. $27.9 \frac{km}{s}$, mit der Vektorformel ergibt sich ca. $(22.5, 16.4) \frac{km}{s}$. Insgesamt müsste die Raumsonde also um ca. $1.9 \frac{km}{s}$ abbremsen, um auf die Transferellipse zum Mars zu gelangen. Das macht durchaus Sinn, denn die

Sonde muss sich auf ihrem Weg zum Mars von der Sonne entfernen und wird so langsamer. Es sie an dieser Stelle angemerkt, dass aufgrund der Natur des Zweikörperproblems der Gravitationseinfluss der Erde nicht beachtet wird. In der Realität wäre eine deutlich höhere Anfangsgeschwindigkeit nötig, um das Gravitationsfeld der Erde zu verlassen.

Mit der oben beschriebenen Konstruktionsmethode kann eine Skizze des Problems erstellt werden:

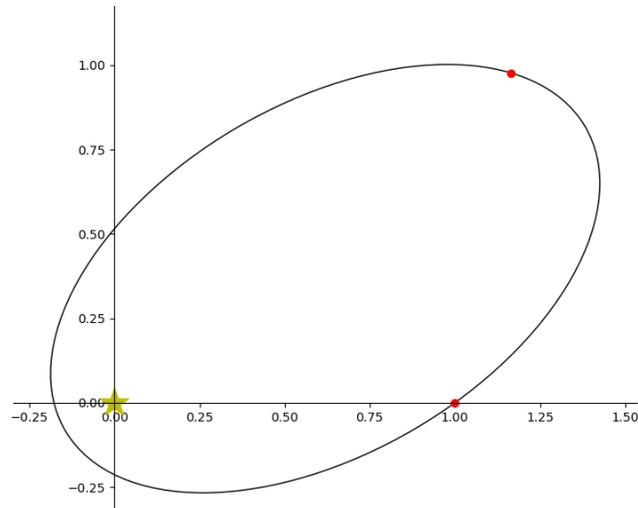


Abbildung 4: Skizze des berechneten Erde-Mars-Transfers

Verbindet man mehrere solcher Transfers, sodass eine Sonde immer wieder durch ein Swing-By Manöver an einem Planeten relativ zur Sonne beschleunigt wird, kann man leicht die Nützlichkeit der Bahnbestimmung zur Planung interplanetarer Raumfahrt mit Hilfe des Problems von Lambert erkennen.

A Formelsammlung

A.1 Kurzübersicht

#	Name	Formel
A.1	Gravitationsparameter	$\mu = GM$ für $M \gg m$
A.2	Kepler-Gleichung ⁴	$M_e = E - e \sin E$
A.3	Mittlere Anomalie	$M_e = n\Delta t = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \Delta t$
A.8	Radius anhand der exzentrischen Anomalie I	$r = a(1 - e \cos E)$
A.10	Radius anhand der exzentrischen Anomalie II	$r \cos^2(\frac{f}{2}) = a(1 - e) \cos^2(\frac{E}{2})$
A.11	Radius anhand der exzentrischen Anomalie III	$r \sin^2(\frac{f}{2}) = a(1 + e) \sin^2(\frac{E}{2})$
A.28	Vis-Viva Gleichung	$v^2 = \mu(\frac{2}{r} - \frac{1}{a})$

A.2 Details

Gravitationsparameter

Der Gravitationsparameter μ gilt für Zweikörpersysteme mit den Massen M und m , in denen die Masse m vernachlässigbar klein ist:

$$\mu = G(M + m) \approx GM \quad \text{für } M \gg m \quad (\text{A.1})$$

Kepler-Gleichung

Die Kepler-Gleichung stellt eine Verbindung zwischen mittlerer Anomalie M_e und exzentrischer Anomalie E eines Punktes her. Sie lässt sich aus den ersten zwei Gesetzen Keplers herleiten [Cur21a]:

$$M_e = E - e \sin E \quad (\text{A.2})$$

Mittlere Anomalie

Die mittlere Anomalie M_e ist eine fiktive Anomalie, die eine gleichförmige Bewegung annimmt. Sie basiert auf der durchschnittlichen Winkelgeschwindigkeit n eines Satelliten auf dem umschreibenden Kreis der eigentlichen elliptischen Bahn. Zusammen mit dem dritten Keplerschen Gesetz ergibt sich [Cur21a]:

$$M_e = \frac{2\pi}{T} \Delta t = n\Delta t = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \Delta t \quad (\text{A.3})$$

Radius anhand der exzentrischen Anomalie

Der nachfolgende Beweis für wichtige Formeln der exzentrischen Anomalie ist nach Horn [Hor06] geführt.

⁴mittlere und exzentrische Anomalie

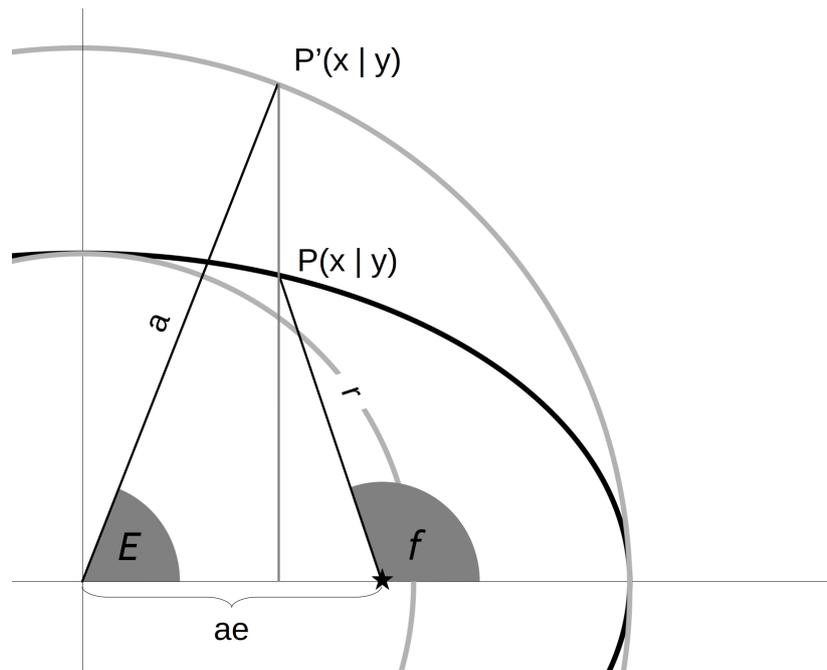


Abbildung 5: Exzentrische Anomalie und Wahre Anomalie

Aus der Graphik 5 ist ersichtlich, dass sich r mit den Längen x und y relativ zum Brennpunkt F ausdrücken lässt:

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (\text{A.4})$$

Desweiteren ist ersichtlich, dass für x gilt:

$$x = r \cos f = a \cos E - ae \quad (\text{A.5})$$

Für y gilt unter der Beachtung des trigonometrischen Satz des Pythagoras $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$:

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \\ y &= b \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \\ y &= b \sqrt{1 - \cos^2 E} \\ y &= b \sqrt{\sin^2 E} \\ y &= b \sin E \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Setzt man nun die beiden Gleichungen (A.5) und (A.6) zurück in die Gleichung (A.4) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 \\ r^2 &= (a \cos E - ae)^2 + (b \sin E)^2 \\ r^2 &= (a^2 \cos^2 E - 2a^2 e \cos E + a^2 e^2) + b^2 \sin^2 E \\ r^2 &= a^2 (\cos^2 E - 2e \cos E + e^2) + b^2 (1 - \cos^2 E) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Beachtet man nun, dass in einer Ellipse $b^2 = a^2 - (ae)^2 = a^2(1 - e^2)$ gilt, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 r^2 &= a^2(\cos^2 E - 2e \cos E + e^2) + b^2(1 - \cos^2 E) \\
 r^2 &= a^2(\cos^2 E - 2e \cos E + e^2) + a^2(1 - e^2)(1 - \cos^2 E) \\
 r^2 &= a^2[(\cos^2 E - 2e \cos E + e^2) + (1 - e^2)(1 - \cos^2 E)] \\
 r^2 &= a^2[(\cos^2 E - 2e \cos E + e^2) + (1 - \cos^2 E - e^2 + e^2 \cos^2 E)] \\
 r^2 &= a^2[1 - 2e \cos E + e^2 \cos^2 E] \\
 r^2 &= a^2(1 - e \cos E)^2 \\
 r &= a(1 - e \cos E)
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

Nach (A.5) gilt auch:

$$\begin{aligned}
 r \cos f &= a \cos E - ae \\
 r[2(\frac{\cos f + 1}{2}) - 1] &= a(\cos E - e) \\
 2r(\frac{\cos f + 1}{2}) &= a(\cos E - e) + r
 \end{aligned} \tag{A.9}$$

Beachtet man nun (B.11) und setzt man für r die Gleichung (A.8) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}
 2r \cos^2(\frac{f}{2}) &= a(\cos E - e) + a(1 - e \cos E) \\
 2r \cos^2(\frac{f}{2}) &= a[(\cos E - e) + (1 - e \cos E)] \\
 2r \cos^2(\frac{f}{2}) &= a[(1 - e)(1 + \cos E)] \\
 2r \cos^2(\frac{f}{2}) &= a(1 - e) \cdot 2 \cos^2 E \\
 r \cos^2(\frac{f}{2}) &= a(1 - e) \cos^2 E
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

Mit dem Sinus ergibt sich ähnlich:

$$\begin{aligned}
 r \cos f &= a \cos E - ae \\
 r[-2(\frac{1 - \cos f}{2}) + 1] &= a(\cos E - e) \\
 -2r(\frac{1 - \cos f}{2}) &= a(\cos E - e) - r \\
 -2r \sin^2(\frac{f}{2}) &= a[(\cos E - e) - (1 - e \cos E)] \\
 r \sin^2(\frac{f}{2}) &= a \cdot (-2)[(1 + e)(1 - \cos E)] \\
 r \sin^2(\frac{f}{2}) &= a(1 + e) \sin^2(\frac{E}{2})
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

Vis-Viva Gleichung

Der nachfolgende Beweis ist nach Rickman [Ric20] geführt.

Betrachtet man als Zweikörperproblem die relative Bewegung zweier Körper mit den Massen m und M und ihren jeweiligen Positionen bzgl. des Ursprungs r_m und r_M , so gilt für die relative Position:

$$\vec{r} = \vec{r}_m - \vec{r}_M \tag{A.12}$$

Die zweite Ableitung dieser Gleichung ergibt (in Newton Notation):

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_m - \ddot{\vec{r}}_M \quad (\text{A.13})$$

Mit $a = \frac{F}{m}$ und der Gravitationskraft ergibt sich:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} &= -\frac{GM}{r^2} \hat{r} - \frac{GM}{r^2} \hat{r} \\ \ddot{\vec{r}} &= -\frac{G}{r^2} \hat{r} (M + m) \\ \ddot{\vec{r}} &= -\frac{\mu}{r^2} \hat{r} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Für das weitere Vorgehen wird noch folgende Betrachtung wichtig, die sich aus der Produktregel bei Ableitungen ergibt:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) = \frac{\partial}{\partial t}(\dot{\vec{v}} \cdot \dot{\vec{v}}) = 2(\dot{\vec{r}} \ddot{\vec{r}}) \quad (\text{A.15})$$

Wird nun Gleichung (A.14) mit dem Geschwindigkeitsvektor multipliziert, erhält man eine gewöhnliche Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^2} \hat{r} &= 0 \\ \ddot{r} \hat{r} + \frac{\mu}{r^2} \hat{r} \dot{r} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Mit Gleichung (A.15) lässt sich die Gleichung umschreiben:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}(\dot{\vec{v}} \cdot \dot{\vec{v}}) + \frac{\mu}{r^2} \hat{r} \dot{r} \quad (\text{A.17})$$

Integriert man nun beide Seiten erhält man den Energieerhaltungssatz, die Summe aus kinetischer und potentieller Energie ist in einem Zweikörpersystem konstant:

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}(\dot{\vec{v}} \cdot \dot{\vec{v}}) + \frac{\mu}{r^2} \hat{r} \dot{r} \right) dt &= 0 \\ \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} &= \text{konst.} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Um den Wert dieser Konstante zu berechnen, sind weitere Schritte notwendig.

Zuerst soll der sogenannte Halbparameter p einer Ellipse betrachtet werden. Der Halbparameter steht senkrecht auf dem Brennpunkt und bezieht sich auf die Hälfte der Sekantenlänge.

Mit dem Satz des Pythagoras gilt:

$$\begin{aligned} b^2 + (ae)^2 &= a^2 \\ b^2 &= a^2 - (ae)^2 \\ b^2 &= a^2(1 - e^2) \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Der Brennpunkt, durch den der Halbparameter geht, liegt bei $x = \pm ae$. Setzt man diesen Punkt in die Ellipsengleichung ein, erhält man:

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{(ae)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{y^2}{b^2} &= 1 - \frac{(ae)^2}{a^2} \\ \frac{y^2}{b^2} &= \frac{a^2 - (ae)^2}{a^2}\end{aligned}\tag{A.20}$$

Mit Gleichung (A.19) ergibt sich für den Wert des Halbparameters:

$$\begin{aligned}\frac{y^2}{b^2} &= \frac{a^2(1 - e^2)}{a^2} \\ \frac{y^2}{b^2} &= \frac{b^2}{a^2} \\ p = y &= \pm \frac{b^2}{a} = a(1 - e^2)\end{aligned}\tag{A.21}$$

Als letzter Schritt lässt sich die Geschwindigkeit mit Hilfe des konstanten Drehimpulses beschreiben (vgl. Beweis Kepler II). Für den Drehimpuls h gilt:

$$\begin{aligned}\vec{h} &= \vec{r} \times \vec{v} \\ \|\vec{h}\| &= \|\vec{r}\| \cdot \|\vec{v}\|\end{aligned}\tag{A.22}$$

Es gilt weiterhin folgende Beziehung zwischen Halbparameter und Drehimpuls [Cur21b]:

$$p = a(1 - e^2) = \frac{h^2}{\mu}\tag{A.23}$$

Jetzt lässt sich die konstante Energie berechnen. Die Energie ist zu jeder Zeit konstant, unter anderem am Perihelabstand r_p der Ellipse ((A.18) mit (A.22)):

$$E = \frac{\vec{v}_p^2}{2} - \frac{\mu}{r_p} = \frac{1}{2} \frac{\vec{h}^2}{r_p^2} - \frac{\mu}{r_p}\tag{A.24}$$

Für den Perihelabstand gilt:

$$r_p = a - ae = a(1 - e)\tag{A.25}$$

Es ergibt sich insgesamt mit obiger Gleichung und (A.23):

$$\begin{aligned}E &= \frac{1}{2} \frac{\vec{h}^2}{a^2(1 - e)^2} - \frac{\mu}{a(1 - e)} \\ &= \frac{\mu p}{2a^2(1 - e)^2} - \frac{\mu}{a(1 - e)} \\ &= \frac{\mu a(1 - e^2)}{2a^2(1 - e)^2} - \frac{\mu}{a(1 - e)} \\ &= \frac{\mu(1 - e^2) - 2\mu(1 - e)}{2a(1 - e)^2}\end{aligned}\tag{A.26}$$

Mit der binomischen Formel $(1 + e)(1 - e) = 1 - e^2$ lässt sich die Gleichung vereinfachen:

$$\begin{aligned} E &= \frac{\mu(1 - e)[(1 + e) - 2]}{2a(1 - e)^2} \\ &= \frac{\mu(1 - e) \cdot -(1 - e)}{2a(1 - e)^2} = -\frac{\mu}{2a} \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Löst man diesen Energieerhaltungssatz nach der Geschwindigkeit auf, erhält man die in der Himmelsmechanik wichtige vis-viva-Gleichung (lat. *lebendige Kraft*):

$$\begin{aligned} \frac{\vec{v}^2}{2} - \frac{\mu}{r} &= -\frac{\mu}{2a} \\ \frac{\vec{v}^2}{2} &= \frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{2a} \\ \vec{v}^2 &= \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

B Trigonometrische Identitäten

B.1 Kurzübersicht

#	Identität
B.1	$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$
B.2	$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$
B.3	$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
B.4	$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$
B.7	$\sin A + \sin B = 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$
B.8	$\sin A - \sin B = 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$
B.9	$\cos A + \cos B = 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$
B.10	$\cos A - \cos B = -2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$
B.11	$\cos^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1 + \cos A}{2}$
B.12	$\sin^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1 - \cos A}{2}$

B.2 Details

Zusammengesetzte Winkel

Der Sinus eines aus den Winkeln A und B zusammengesetzten Winkels lässt sich folgendermaßen ausschreiben [Ree07]:

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \quad (\text{B.1})$$

Mit den Definition $\cos(-A) = \cos A$ und $\sin(-A) = -\sin A$ lassen sich auch aus Differenzen zusammengesetzte Winkel ausformulieren:

$$\begin{aligned} \sin(A - B) &= \sin A \cos(-B) + \cos A \sin(-B) \\ &= \sin A \cos B - \cos A \sin B \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Der Kosinus eines aus den Winkeln A und B zusammengesetzten Winkels lässt sich folgendermaßen ausschreiben [Ree07]:

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \quad (\text{B.3})$$

Analog dem Sinus gilt für Subtraktionen im Zusammengesetzten Winkel:

$$\begin{aligned} \cos(A - B) &= \cos A \cos(-B) - \sin A \sin(-B) \\ &= \cos A \cos B + \sin A \sin B \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Summen zweier trigonometrischer Funktionen

Für alle nachfolgenden Beweise werden die Winkel A und B als Differenzen und Summen der beiden Winkel α und β ausgedrückt, wobei α das geometrische Mittel der beiden Winkel darstellt und $\pm\beta$ die Abweichung:

$$A = \alpha + \beta \quad (\text{B.5a})$$

$$B = \alpha - \beta \quad (\text{B.5b})$$

Durch kreuzweises Einsetzen beider Gleichungen in die jeweils andere ergibt sich für α und β :

$$\alpha = \frac{A + B}{2} \quad (\text{B.6a})$$

$$\beta = \frac{A - B}{2} \quad (\text{B.6b})$$

Für die Addition zweier Sinusfunktionen gilt nun mit den Gleichungen (B.1) und (B.2):

$$\begin{aligned} \sin A + \sin B &= \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \\ &= (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) + (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) \\ &= 2 \sin \alpha \cos \beta \\ &= 2 \sin\left(\frac{A + B}{2}\right) \cos\left(\frac{A - B}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Für die Subtraktion zweier Sinusfunktionen gilt analog:

$$\begin{aligned} \sin A - \sin B &= \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta \\ &= 2 \cos\left(\frac{A + B}{2}\right) \sin\left(\frac{A - B}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Das Gleiche Verfahren kann auch für die Kosinusfunktion angewendet werden:

$$\begin{aligned} \cos A + \cos B &= \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \\ &= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \\ &= 2 \cos \alpha \cos \beta \\ &= 2 \cos\left(\frac{A + B}{2}\right) \cos\left(\frac{A - B}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Für die Subtraktion erhält man:

$$\begin{aligned} \cos A - \cos B &= \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta \\ &= 2 \sin\left(\frac{A + B}{2}\right) \sin\left(\frac{A - B}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Halbwinkel

Ausgehend von der Doppelwinkel-Identität des Kosinus lässt sich die gesuchte Halbwinkel-Identität herleiten [Ree07]:

$$\begin{aligned}\cos(2A) &= 2 \cos^2 A - 1 \\ \cos^2 A &= \frac{1 + \cos(2A)}{2} \\ \cos^2\left(\frac{A}{2}\right) &= \frac{1 + \cos A}{2}\end{aligned}\tag{B.11}$$

Es gilt weiter [Ree07]:

$$\begin{aligned}\cos(2A) &= 1 - 2 \sin^2 A \\ \sin^2 A &= \frac{1 - \cos(2A)}{2} \\ \sin^2\left(\frac{A}{2}\right) &= \frac{1 - \cos(A)}{2}\end{aligned}\tag{B.12}$$

C Formeln und Beweise

$$\Delta t = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} [(\alpha - \beta) - (\sin \alpha - \sin \beta)]$$

Im Folgenden wird ein Beweis der Lagrange'schen Formel und zugehöriger Parameter nach Battin [Bat99b] für die Lösung des Problems von Lambert aufgeführt, der auf dem Beweis von Lagrange basiert. Lagrange zeigte als erster, dass die Zeitdifferenz tatsächlich, wie von Lambert posuliert, nur mit der großen Halbachse und der beiden Positionsvektoren berechnet werden kann. Ein ähnlicher Beweis wurde auch von Carl Friedrich Gauß im Buch *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*⁵ aufgeführt, die Formel aber Euler zugeschrieben [Gau09].

C.1 Lagrange Formel

Die Formel für die mittlere Anomalie (A.3) ist, nach der Zeit umgestellt:

$$\Delta t = M_e \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \quad (\text{C.1})$$

Die mittlere Anomalie ist in diesem Fall die Differenz zwischen den zwei Anfangs- und Endpunkten P_1 und P_2 mit den zugehörigen mittleren Anomalien M_{e1} und M_{e2} :

$$\Delta t = (M_{e2} - M_{e1}) \sqrt{a^3/\mu} \quad (\text{C.2})$$

Durch Einsetzen von Keplers Gleichung (A.2) erhält man:

$$\begin{aligned} \Delta t &= [(E_2 - e \sin E_2) - (E_1 - e \sin E_1)] \sqrt{a^3/\mu} \\ \Delta t &= [(E_2 - E_1) - (e \sin E_2 - e \sin E_1)] \sqrt{a^3/\mu} \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Mit der Sinus-Subtraktions Regel (B.8) lässt sich die Gleichung weiter umformen:

$$\begin{aligned} \Delta t &= [(E_2 - E_1) - (e \cdot 2 \sin(\frac{E_2 - E_1}{2}) \cos(\frac{E_2 + E_1}{2}))] \sqrt{a^3/\mu} \\ \Delta t &= 2 \cdot [1/2(E_2 - E_1) - (e \sin(\frac{E_2 - E_1}{2}) \cos(\frac{E_2 + E_1}{2}))] \sqrt{a^3/\mu} \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Nun werden passend folgende Variablen definiert:

$$\psi = \frac{1}{2}(E_2 - E_1) \quad (\text{C.5a})$$

$$\cos \phi = e \cos(\frac{E_2 + E_1}{2}) \quad (\text{C.5b})$$

Die Gleichung lautet nun:

$$\Delta t = 2(\psi - \sin \psi \cos \phi) \sqrt{a^3/\mu} \quad (\text{C.6})$$

Weiter wird folgendes definiert:

$$\alpha = \phi + \psi \quad (\text{C.7a})$$

$$\beta = \phi - \psi \quad (\text{C.7b})$$

⁵Theorie der Bewegung von Himmelskörpern, die in Kegelschnitten die Sonne umlaufen

Durch gegenseitiges Einsetzen erhält man Definition von ψ und ϕ in Abhängigkeit von α und β :

$$\psi = \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (\text{C.8a})$$

$$\phi = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad (\text{C.8b})$$

Setzt man diese Werte wiederum in Gleichung (C.6) ein, erhält man:

$$\Delta t = 2\left[\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\right] \sqrt{a^3/\mu} \quad (\text{C.9})$$

Mit der umgekehrten Sinus-Subtraktions Regel (B.8) kann die Gleichung in die endgültige Form gebracht werden:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} [(\alpha - \beta) - (\sin \alpha - \sin \beta)] \quad (\text{C.10})$$

C.2 Weitere Parameter

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s}{2a}} \quad \sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{s-c}{2a}}$$

Mit etwas Arbeit lassen sich nun auch die anderen Parameter hinsichtlich der neu eingeführten Variablen α und β definieren.

Distanzen zum Zentralkörper

Für die Summe der beiden Parameter r_1 und r_2 gilt mit Blick auf Gleichung (A.8):

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= a(1 - e \cos E_1) + a(1 - e \cos E_2) \\ &= 2a\left(1 - \frac{1}{2}e(\cos E_1 + \cos E_2)\right) \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Mit der Additionsregel für Kosinusfunktionen (B.9) ergibt sich weiter:

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= 2a\left(1 - \frac{1}{2}e(\cos E_1 + \cos E_2)\right) \\ &= 2a\left(1 - e \cos\left(\frac{E_2 + E_1}{2}\right) \cos\left(\frac{E_2 - E_1}{2}\right)\right) \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Beachtet man nun die obigen Definition von ψ und ϕ (C.5), so gilt:

$$r_1 + r_2 = 2a(1 - \cos \psi \cos \phi) \quad (\text{C.13})$$

Sehne c

Um die Sehne c zu spezifizieren, kombiniert man zunächst die Gleichung (A.10) für beide Punkte P_1 und P_2 . Der Einfachheit halber werden die *Wurzeln* beider Gleichungen miteinander multipliziert:

$$\sqrt{r_1 r_2} \cos\left(\frac{f_1}{2}\right) \cos\left(\frac{f_2}{2}\right) = a(1 - e) \cos\left(\frac{E_1}{2}\right) \cos\left(\frac{E_2}{2}\right) \quad (\text{C.14})$$

Dasselbe Verfahren wird auch auf die Gleichung (A.11) angewandt:

$$\sqrt{r_1 r_2} \sin\left(\frac{f_1}{2}\right) \sin\left(\frac{f_2}{2}\right) = a(1+e) \sin\left(\frac{E_1}{2}\right) \sin\left(\frac{E_2}{2}\right) \quad (\text{C.15})$$

Addiert man nun beide Gleichungen (C.14) und (C.15) erhält man:

$$\begin{aligned} & \sqrt{r_1 r_2} [\cos\left(\frac{f_1}{2}\right) \cos\left(\frac{f_2}{2}\right) + \sin\left(\frac{f_1}{2}\right) \sin\left(\frac{f_2}{2}\right)] = \\ & a[(1-e) \cos\left(\frac{E_1}{2}\right) \cos\left(\frac{E_2}{2}\right) + (1+e) \sin\left(\frac{E_1}{2}\right) \sin\left(\frac{E_2}{2}\right)] \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Unter Verwendung der umgekehrten trigonometrischen Identitäten (B.3) und (B.4) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sqrt{r_1 r_2} \cos\left(\frac{f_2 - f_1}{2}\right) &= a[\cos\left(\frac{E_1}{2}\right) \cos\left(\frac{E_2}{2}\right) - e \cos\left(\frac{E_1}{2}\right) \cos\left(\frac{E_2}{2}\right) + \\ & \quad \sin\left(\frac{E_1}{2}\right) \sin\left(\frac{E_2}{2}\right) + e \sin\left(\frac{E_1}{2}\right) \sin\left(\frac{E_2}{2}\right)] \\ \sqrt{r_1 r_2} \cos\left(\frac{\Delta f}{2}\right) &= a[(\cos\left(\frac{E_1}{2}\right) \cos\left(\frac{E_2}{2}\right) + \sin\left(\frac{E_1}{2}\right) \sin\left(\frac{E_2}{2}\right)) - \\ & \quad e(\cos\left(\frac{E_1}{2}\right) \cos\left(\frac{E_2}{2}\right) - \sin\left(\frac{E_1}{2}\right) \sin\left(\frac{E_2}{2}\right))] \\ \sqrt{r_1 r_2} \cos\left(\frac{\Delta f}{2}\right) &= a[\cos\left(\frac{E_2 - E_1}{2}\right) - e \cos\left(\frac{E_2 + E_1}{2}\right)] \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Mit den obigen Definition von ψ und ϕ (C.5) ergibt sich schließlich die Identität:

$$\sqrt{r_1 r_2} \cos\left(\frac{\Delta f}{2}\right) = a(\cos \psi - \cos \phi) \quad (\text{C.18})$$

Nun zum eigentlichen Parameter, der Sehne c . Für die Sehne gilt mit dem Kosinussatz:

$$c^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos f \quad (\text{C.19})$$

Unter Verwendung der trigonometrischen Identität (B.11) erhält man bei weiterer Umformung:

$$\begin{aligned} c^2 &= r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 (1 - 1 - \cos f) \\ &= r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \left(1 - 2 \frac{1 + \cos f}{2}\right) \\ &= r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \left(1 - 2 \cos^2\left(\frac{f}{2}\right)\right) \\ &= r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 - 4r_1 r_2 \cos^2\left(\frac{f}{2}\right) \\ &= (r_1 + r_2)^2 - 4r_1 r_2 \cos^2\left(\frac{f}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

Setzt man nun die obigen Identitäten (C.13) und (C.18) in die Gleichung ein, lässt sich c weiter ausschreiben:

$$\begin{aligned}
 c^2 &= (r_1 + r_2)^2 - 4r_1r_2 \cos^2\left(\frac{f}{2}\right) \\
 &= [2a(1 - \cos \psi \cos \phi)]^2 - 4[a(\cos \psi - \cos \phi)]^2 \\
 &= 4a^2(1 - \cos \psi \cos \phi)^2 - 4a^2(\cos \psi - \cos \phi)^2 \\
 &= 4a^2[(1 - \cos \psi \cos \phi)^2 - (\cos \psi - \cos \phi)^2] \\
 &= 4a^2[1 - 2 \cos \psi \cos \phi + \cos^2 \psi \cos^2 \phi - \cos^2 \psi - \cos^2 \phi + 2 \cos \psi \cos \phi] \\
 &= 4a^2[1 - \cos^2 \psi - \cos^2 \phi + \cos^2 \psi \cos^2 \phi] \\
 &= 4a^2[(1 - \cos^2 \psi)(1 - \cos^2 \phi)]
 \end{aligned} \tag{C.21}$$

Mit dem trigonometrischen Pythagoras $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ ist eine letzte Vereinfachung möglich:

$$c = 2a \sin \psi \sin \phi \tag{C.22}$$

Semiperimeter

Der Parameter s wird als *Semiperimeter* bezeichnet und ist als halber Umfang des Dreiecks ΔFR_1R_2 definiert:

$$s = \frac{1}{2}(r_1 + r_2 + c) \tag{C.23}$$

Für den vollen Umfang $2s$ des Dreiecks gilt unter Einbezug der Gleichungen (C.13) für die Distanzen und (C.22) für die Sehne:

$$\begin{aligned}
 2s &= (r_1 + r_2) + c \\
 &= 2a(1 - \cos \psi \cos \phi) + 2a \sin \psi \sin \phi \\
 &= 2a[1 - (\cos \psi \cos \phi - \sin \psi \sin \phi)]
 \end{aligned} \tag{C.24}$$

Zusammen mit der trigonometrischen Identität (B.3) sowie der Definition von α (C.7) gilt:

$$\begin{aligned}
 2s &= 2a(1 - \cos(\psi + \phi)) \\
 &= 2a(1 - \cos \alpha)
 \end{aligned} \tag{C.25}$$

Mit dem gleichen Ansatz, dieses Mal mit der trigonometrischen Identität (B.4) und der Definition von β (C.7) erhält man auch:

$$\begin{aligned}
 2(s - c) &= 2s - 2c = (r_1 + r_2) - c \\
 &= 2a(1 - \cos \psi \cos \phi) - 2a \sin \psi \sin \phi \\
 &= 2a[1 - (\cos \psi \cos \phi + \sin \psi \sin \phi)] \\
 &= 2a[1 - \cos(\psi - \phi)] \\
 &= 2a(1 - \cos \beta)
 \end{aligned} \tag{C.26}$$

Löst man nun die Gleichung (C.25) unter Verwendung der Halbwinkelidentität des Sinus (B.12) auf, erhält man die anfangs erwähnte Definition für den Winkel α in Abhängigkeit von s und a :

$$\begin{aligned} 2s &= 2a(1 - \cos \alpha) \\ \frac{s}{2a} &= \frac{1 - \cos \alpha}{2} \\ \frac{s}{2a} &= \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

Es gilt also für α :

$$\boxed{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{s}{2a}}} \quad (\text{C.28})$$

Dasselbe Verfahren auf Gleichung (C.26) angewandt, liefert:

$$\begin{aligned} 2(s - c) &= 2a(1 - \cos \beta) \\ \frac{s - c}{2a} &= \frac{1 - \cos \alpha}{2} \\ \frac{s - c}{2a} &= \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

Für β gilt also:

$$\boxed{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{s - c}{2a}}} \quad (\text{C.30})$$

C.3 Umlaufzeit

Wie in den Abbildungen 2 und 3 zu erkennen ist, gibt es (außer einiger Ausnahmen) immer zwei mögliche Lösungsellipsen mit jeweils zwei unterschiedlichen Laufrichtungen (gegen und mit dem Uhrzeigersinn). Von diesen vier möglichen Zeiten entspricht nur einer der gesuchten Umlaufzeit.

Die beiden Ellipsen seien als A und B definiert, wobei die Ellipse A die Ellipse mit dem Brennpunkt F' in Abbildung 3, B dementsprechend die Ellipse mit Brennpunkt F'' . Jordan [Jor64] gibt die vier möglichen Umlaufzeit wie folgt an:

1. Kürzeste Transferzeit auf Ellipse A gegen den Uhrzeigersinn:

$$\Delta t_{Ak} = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} [(\alpha - \beta) - (\sin \alpha - \sin \beta)] \quad (\text{C.31})$$

2. Längste Transferzeit auf Ellipse A im Uhrzeigersinn:

$$\Delta t_{Al} = T_A - \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} [(\alpha - \beta) - (\sin \alpha - \sin \beta)] \quad (\text{C.32})$$

3. Kurze Transferzeit auf Ellipse B im Uhrzeigersinn:

$$\Delta t_{Bk} = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} [(\alpha + \beta) - (\sin \alpha + \sin \beta)] \quad (\text{C.33})$$

4. Lange Transferzeit auf Ellipse B gegen den Uhrzeigersinn:

$$\Delta t_{Bl} = T_B - \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} [(\alpha + \beta) - (\sin \alpha + \sin \beta)] \quad (\text{C.34})$$

Betrachtet man (C.32), so lässt sich mit dem dritten keplerschen Gesetz wie folgt vereinfachen:

$$\begin{aligned} \Delta t_{Al} &= T_A - \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} [(\alpha - \beta) - (\sin \alpha - \sin \beta)] \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} - \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} [(\alpha - \beta) - (\sin \alpha - \sin \beta)] \\ &= \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} (2\pi - [(\alpha - \beta) - (\sin \alpha - \sin \beta)]) \\ &= \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} [(2\pi - \alpha) - (-\beta) + \sin \alpha - \sin \beta] \end{aligned} \quad (\text{C.35})$$

Seien nun folgende Größen definiert:

$$\alpha_{lang} = 2\pi - \alpha \quad (\text{C.36a})$$

$$\beta_{umk} = -\beta \quad (\text{C.36b})$$

Mit den Tatsachen, dass $\sin(2\pi - A) = -\sin A$ und $\sin(-A) = -\sin A$ gilt, lässt sich (C.35) in die gleiche Form wie die ursprüngliche Lagrange Formel bringen:

$$\Delta t_{Al} = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} [(\alpha_{lang} - \beta_{umk}) - (\sin \alpha_{lang} - \sin \beta_{umk})] \quad (\text{C.37})$$

Auch die anderen Gleichungen lassen sich auf diese Art umformen. Bei (C.33) ergibt dies:

$$\Delta t_{Bk} = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} [(\alpha - \beta_{umk}) - (\sin \alpha - \sin \beta_{umk})] \quad (\text{C.38})$$

Bei (C.33) gilt nach Ausklammern und Umformen:

$$\Delta t_{Bl} = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} [(\alpha_{lang} - \beta) - (\sin \alpha_{lang} - \sin \beta)] \quad (\text{C.39})$$

Hier noch einmal in Tabellenform als Übersicht:

Tabelle 1: Winkel für verschiedene Trajektorien

	α	β
A, kurz	α	β
A, lang	α_{lang}	β_{umk}
B, kurz	α	β_{umk}
B, lang	α_{lang}	β

Es ist zu erkennen, dass der Parameter α die Länge der Transferzeit bestimmt, d.h. dass α_{lang} für die Trajektorie mit langer Transferzeit steht, wohingegen der Parameter β die Richtung der Trajektorie bestimmt, d.h. dass β_{umk} für eine Umkehrung der Flugrichtung (in diesem Falle im Uhrzeigersinn).

C.4 Geschwindigkeit

Als letztes sollen noch die Geschwindigkeiten an Anfangs- und Endposition für den kürzesten Transfer (A, kurz) betrachtet werden. Hierfür wird die aus obigen Formeln ermittelte Halbachse a benötigt. Wird die Geschwindigkeit einer der anderen Umlaufbahnen benötigt, sind die Parameter nach Tabelle 1 einzusetzen. Die benötigte Geschwindigkeitsänderung, um ein Transfer entlang der berechneten Transferellipse zu vollziehen, kann aus der Differenz zur vorhandenen Geschwindigkeit des Objekts ermittelt werden.

Braucht man nur den Geschwindigkeitsbetrag, kann die vis-viva-Gleichung verwendet werden (A.28). Für die benötigte Anfangsgeschwindigkeit wird die Länge des Anfangsvektors eingesetzt, für die Endgeschwindigkeit analog die Länge des Endvektors:

$$v_1 = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{a}\right)} \quad v_2 = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r_2} - \frac{1}{a}\right)}$$

Wird hingegen ein Geschwindigkeitsvektor benötigt, der vor allem bei realistischen Anwendungsfällen nützlich sein kann, ist folgende Formel zu nutzen:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \sqrt{\frac{\mu}{4a}} \left[\left(\cot\frac{\beta}{2} + \cot\frac{\alpha}{2} \right) \hat{r}_c + \left(\cot\frac{\beta}{2} - \cot\frac{\alpha}{2} \right) \hat{r}_1 \right] \\ \vec{v}_2 &= \sqrt{\frac{\mu}{4a}} \left[\left(\cot\frac{\beta}{2} + \cot\frac{\alpha}{2} \right) \hat{r}_c - \left(\cot\frac{\beta}{2} - \cot\frac{\alpha}{2} \right) \hat{r}_2 \right] \end{aligned}$$

Dabei sind \hat{r}_c , \hat{r}_1 und \hat{r}_2 jeweils die Einheitsvektoren der oben definierten Sehne und des ersten und zweiten Positionsvektors.

Herleitung

Die Herleitung funktioniert über verzerrte Koordinatensysteme. Bei elliptischen Fällen gilt laut [Bat99c]:

$$v_1 = v_c \hat{r}_c + v_p \hat{r}_1 \quad (\text{C.41a})$$

$$v_2 = v_c \hat{r}_c - v_p \hat{r}_2 \quad (\text{C.41b})$$

mit den sich aus den Lagrange Koeffizienten ergebenden Geschwindigkeiten v_c und v_p :

$$v_c = \frac{c\sqrt{\mu p}}{r_1 r_2 \sin(\Delta f)} \quad (\text{C.42a})$$

$$v_p = \sqrt{\frac{\mu}{p} \frac{1 - \cos(\Delta f)}{\sin(\Delta f)}} \quad (\text{C.42b})$$

Weiterhin gibt [Bat99c] für den Parameter der Ellipse (vgl. Semiparameter der vis-viva-Gleichung) das Verhältnis von v_c und v_p an:

$$\frac{p}{p_m} = \frac{v_c}{v_p} = \frac{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \quad (\text{C.43})$$

mit:

$$p_m = \frac{r_1 r_2}{c} (1 - \cos(\Delta f)) \quad (\text{C.44})$$

Die Gleichung (C.34) lässt sich mit der Definition (C.8) aus dem Beweis der Lagrange Formel in eine für den nachfolgenden Beweis nützliche Form bringen:

$$p = \frac{\sin \phi}{\sin \psi} p_m = \frac{\sin \phi}{\sin \psi} \frac{r_1 r_2}{c} (1 - \cos(\Delta f)) \quad (\text{C.45})$$

Für v_c gilt mit obiger Gleichung (C.36):

$$\begin{aligned} v_c^2 &= \frac{\mu c^2}{r_1^2 r_2^2 \sin^2(\Delta f)} p = \frac{\mu c^2 \cdot \sin \phi r_1 r_2 (1 - \cos(\Delta f))}{r_1^2 r_2^2 \sin^2(\Delta f) \cdot \sin \psi c} \\ &= \frac{\mu c \sin \phi (1 - \cos(\Delta f))}{r_1 r_2 \sin^2(\Delta f) \sin \psi} \end{aligned} \quad (\text{C.46})$$

Setzt man die Definition (C.22) für c aus dem Beweis für die Lagrange Formel ein, erhält man:

$$\begin{aligned} v_c^2 &= \mu \frac{2a \sin \psi \sin \phi \sin \phi (1 - \cos(\Delta f))}{r_1 r_2 \sin^2(\Delta f) \sin \psi} \\ &= \mu \frac{2a \sin^2 \phi (1 - \cos(\Delta f))}{r_1 r_2 \sin^2(\Delta f)} \end{aligned} \quad (\text{C.47})$$

Formt man die trigonometrische Halbwinkel-Identität des Sinus (B.12) um, ergibt sich:

$$1 - \cos A = 2 \sin^2\left(\frac{A}{2}\right) \quad (\text{C.48})$$

In die obige Formel eingesetzt:

$$v_c^2 = \mu \frac{a \sin^2 \phi \cdot 4 \sin^2\left(\frac{\Delta f}{2}\right)}{r_1 r_2 \cdot \sin^2(\Delta f)} \quad (\text{C.49})$$

Aus der Zusammengesetzte-Winkel-Identität des Sinus (B.1) ergibt sich mit zwei identischen Winkeln A die erstaunliche Identität:

$$\begin{aligned} \sin(A + A) &= \sin A \cos A + \sin A \cos A \\ \sin(2A) &= 2 \sin A \cos A \\ \cos A &= \frac{\sin(2A)}{2 \sin A} \end{aligned} \quad (\text{C.50})$$

Für die obige Formel bedeutet dies:

$$\begin{aligned} v_c^2 &= \mu \frac{a \sin^2 \phi}{r_1 r_2} \cdot \left(\frac{2 \sin\left(\frac{\Delta f}{2}\right)}{\sin(\Delta f)} \right)^2 \\ &= \mu \frac{a \sin^2 \phi}{r_1 r_2 \cdot \cos\left(\frac{\Delta f}{2}\right)} \end{aligned} \quad (\text{C.51})$$

Hierbei ist der Nenner dieser Formel die in der Lagrange Formel hergeleitete Identität (C.18), die nun eingesetzt werden kann:

$$\begin{aligned} v_c^2 &= \mu \frac{a \sin^2 \phi}{a^2 (\cos \psi - \cos \phi)^2} \\ &= \mu \frac{\sin^2 \phi}{a (\cos \psi - \cos \phi)^2} \end{aligned} \quad (\text{C.52})$$

Für v_c gilt jetzt:

$$v_c = \sqrt{\frac{\mu}{a} \frac{\sin \phi}{\cos \psi - \cos \phi}} \quad (\text{C.53})$$

Erweitert man diesen Bruch mit 2, so erhält man:

$$\begin{aligned} v_c &= \sqrt{\frac{\mu}{a} \frac{\sin \phi \cdot 2}{\cos \psi - \cos \phi \cdot 2}} \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{4a} \frac{2 \sin \phi}{\cos \psi - \cos \phi}} \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{4a} \frac{\sin \phi}{-0.5(\cos \phi - \cos \psi)}} \end{aligned} \quad (\text{C.54})$$

Für den Nenner gilt nun die Subtraktions-Identität des Kosinus (B.10):

$$v_c = \sqrt{\frac{\mu}{4a} \frac{\sin \phi}{\sin(\frac{\phi+\psi}{2}) \sin(\frac{\phi-\psi}{2})}} \quad (\text{C.55})$$

Mit den Definitionen von α und β (C.7) ergibt sich:

$$v_c = \sqrt{\frac{\mu}{4a} \frac{\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2}) \sin(\frac{\beta}{2})}} \quad (\text{C.56})$$

Der Zähler kann mit der trigonometrischen Zusammengesetzte-Winkel-Identität des Sinus (B.1) ausgeschrieben werden:

$$v_c = \sqrt{\frac{\mu}{4a} \frac{\sin(\frac{\alpha}{2}) \cos(\frac{\beta}{2}) + \cos(\frac{\alpha}{2}) \sin(\frac{\beta}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2}) \sin(\frac{\beta}{2})}} \quad (\text{C.57})$$

Teilt und kürzt man den Bruch, so erhält man:

$$\begin{aligned} v_c &= \sqrt{\frac{\mu}{4a} \left(\frac{\sin(\frac{\alpha}{2}) \cos(\frac{\beta}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2}) \sin(\frac{\beta}{2})} + \frac{\cos(\frac{\alpha}{2}) \sin(\frac{\beta}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2}) \sin(\frac{\beta}{2})} \right)} \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{4a} \left(\frac{\cos(\frac{\beta}{2})}{\sin(\frac{\beta}{2})} + \frac{\cos(\frac{\alpha}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2})} \right)} \end{aligned} \quad (\text{C.58})$$

Für den Tangens gilt allgemein:

$$\tan(A) = \frac{\sin A}{\cos A} \quad (\text{C.59})$$

Damit lässt sich in obiger Gleichung der Kotangens \cot schreiben, die Umkehrung des Tangens:

$$v_c = \sqrt{\frac{\mu}{4a} [\cot(\frac{\beta}{2}) + \cot(\frac{\alpha}{2})]} \quad (\text{C.60})$$

Die Gleichung für v_p lässt sich auf dieselbe Art und mit den gleichen trigonometrischen Identitäten herleiten. Die Herleitung sei hier nur skizziert.

$$\begin{aligned} v_p^2 &= \mu \frac{(1 - \cos(\Delta f))^2}{p \cdot \sin^2(\Delta f)} = \mu \frac{(1 - \cos(\Delta f))2a \sin^2 \psi}{r_1 r_2 \sin^2(\Delta f)} \\ &= \mu \frac{a \sin^2 \psi}{r_1 r_2} \frac{1}{\cos^2(\Delta f)} = \frac{\mu}{a} \frac{\sin^2 \psi}{(\cos \psi - \cos \phi)^2} \end{aligned} \quad (\text{C.61})$$

Es ist zu erkennen, dass der Nenner $\cos \psi - \cos \phi$ hier im Vergleich zu (C.44) vertauscht ist, d.h. dass -1 ausgeklammert wurde. Außerdem ist der Zähler hier $\sin \psi$, also $\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$. Somit resultiert dies, nach dem gleichen Verfahren wie oben, in folgend Formel:

$$v_c = \sqrt{\frac{\mu}{4a} [\cot(\frac{\beta}{2}) - \cot(\frac{\alpha}{2})]} \quad (\text{C.62})$$

Setzt man nun die beiden Gleichungen (C.51) und (C.53) in die Anfangs zitierte Formel für die Anfangs- und Endgeschwindigkeit (C.32) ein, erhält man nach Ausklammern:

$$\vec{v}_1 = \sqrt{\frac{\mu}{4a}} [(\cot \frac{\beta}{2} + \cot \frac{\alpha}{2}) \hat{r}_c + (\cot \frac{\beta}{2} - \cot \frac{\alpha}{2}) \hat{r}_1] \quad (\text{C.63a})$$

$$\vec{v}_2 = \sqrt{\frac{\mu}{4a}} [(\cot \frac{\beta}{2} + \cot \frac{\alpha}{2}) \hat{r}_c - (\cot \frac{\beta}{2} - \cot \frac{\alpha}{2}) \hat{r}_2] \quad (\text{C.63b})$$

D Python Implementierung

Die in dieser Arbeit vorgestellten Ergebnisse wurden in Python 3 mit der SciPy- Stack⁶, einer Sammlung von Open-Source Bibliotheken zum naturwissenschaftlichen Programmieren, implementiert. Zur Ausführung des Programms wird eine neue Version des Python-Interpreters, mindestens aber Version 3.6, empfohlen. Außerdem wird die SciPy Bibliothek numpy benötigt. Die SciPy Bibliothek matplotlib ist optional und ermöglicht eine graphische Darstellung der Berechnungen.

```

from functools import partial
from typing import Callable, Optional, Tuple

import numpy as np

# Optional matplotlib imports for graphical representation
try:
    import matplotlib.pyplot as plt
    from matplotlib.patches import Ellipse
except ImportError:
    plt = None
    Ellipse = None

# Type definitions
VEC = np.ndarray
COORD = Tuple[float, float]

# Helpers
def bisect(f: Callable[[float], float], a: float, b: float,
          target: float = 0, max_iter: int = 1000,
          precision: float = 10**(-8)) -> float:
    assert a < b
    assert max_iter > 0

    mid = None
    for _ in range(max_iter):
        mid = (a+b)/2
        val = f(mid) - target

        if abs(val) <= precision:
            return mid
        elif np.sign(f(a)-target) == np.sign(val):
            a = mid
        else:
            b = mid

    return mid

def intersect_circles(
    M0: VEC, r0: float, M1: VEC, r1: float
) -> Optional[Tuple[VEC, Optional[VEC]]]:
    D = M1 - M0
    d = np.linalg.norm(D)

    # Circles not intersecting and separate
    if d > (r0 + r1):
        return None
    # Circles contained

```

⁶<https://www.scipy.org/>

```

elif d < abs(r0 - r1):
    return None
# Circles are the same, infinite intersections
elif d == 0:
    return None

a = (r0**2 - r1**2 + d**2)/(2*d)
h = np.sqrt(r0**2 - a**2)

MID = M0 + D * a/d

# Circles touching, only one intersection at MID
if d == (r0 + r1):
    return (MID, None)

x0 = MID[0] + h*D[1]/d
y0 = MID[1] - h*D[0]/d

x1 = MID[0] - h*D[1]/d
y1 = MID[1] + h*D[0]/d

return (np.array([x0, y0]), np.array([x1, y1]))

def plt_transfer_ellipse(
    a: float, focus: VEC, **kwargs
) -> Ellipse:
    # Matplotlib required!
    assert Ellipse is not None

    # One of the foci is assumed to be at (0, 0)
    # linear eccentricity
    e = np.linalg.norm(focus)/2
    b = np.sqrt(a**2 - e**2) # b^2 = a^2 - e^2

    center = focus/2
    angle = np.arctan(
        focus[1]/focus[0])*(360/(2*np.pi))

    return Ellipse(xy=(center[0], center[1]), width=2*a,
                    height=2*b, angle=angle, **kwargs)

def plot_lambert(R0: VEC, R1: VEC, a: float):
    # Matplotlib required!
    assert plt is not None

    # Get possible empty foci (might be None, 1 or 2)
    intersections = intersect_circles(
        R0, 2*a - np.linalg.norm(R0),
        R1, 2*a - np.linalg.norm(R1)
    )

    fig, ax = plt.subplots()

    ax.plot(R0[0], R0[1], "ro") # Red marker for R0
    ax.plot(R1[0], R1[1], "ro") # Red marker for R1
    # Star marker for central body
    ax.plot(0, 0, "y*", markersize=24)

    if intersections is not None:
        I1, I2 = intersections
        ax.add_patch(plt_transfer_ellipse(a, I1, fill=None))
        if I2 is not None:

```

```

        ax.add_patch(
            plt_transfer_ellipse(a, I2, fill=None))

# Centered x-axis
ax.spines['bottom'].set_position('zero')
# Centered y-axis
ax.spines['left'].set_position('zero')
# Remove top border
ax.spines['top'].set_visible(False)
# Remove right border
ax.spines['right'].set_visible(False)

# Equal axes scaling
plt.gca().set_aspect('equal', adjustable='box')
plt.show()

# Main Code
def calc_alpha(
    a: float, s: float, long: bool = False
) -> float:
    alpha = 2*np.arcsin(np.sqrt(s/(2*a)))
    if long:
        return 2*np.pi - alpha
    return alpha

def calc_beta(
    a: float, s: float, c: float,
    rev: bool = False
) -> float:
    beta = 2*np.arcsin(np.sqrt((s-c)/(2*a)))
    if rev:
        return -beta
    return beta

def lagrange_eq(
    a: float, mu: float, s: float, c: float,
    long_arc: bool = False
) -> float:
    A = calc_alpha(a=a, s=s, long=long_arc)
    B = calc_beta(a=a, s=s, c=c)
    p = np.sqrt((a**3)/mu)

    return p * ((A - B) - (np.sin(A) - np.sin(B)))

def calc_velocity(r0: VEC, r1: VEC, rc: VEC,
                 a: float, alpha: float, beta: float,
                 mu: float) -> Tuple[float, float]:
    rc_norm = rc / np.linalg.norm(rc)
    p = np.sqrt(mu/(4*a))

    x = 1/np.tan(beta/2) # cot(beta/2)
    y = 1/np.tan(alpha/2) # cot(alpha/2)

    X = x + y # cot(beta/2) + cot(alpha/2)
    Y = x - y # cot(beta/2) - cot(alpha/2)

    v1 = p * (X*rc_norm + Y*(r0/np.linalg.norm(r0)))
    v2 = p * (X*rc_norm - Y*(r1/np.linalg.norm(r1)))

    return (v1, v2)

```

```

def solve_lambert(
    r0: VEC, r1: VEC, dt: float, mu: float
) -> Tuple[float, float, float]:
    R0 = np.linalg.norm(r0)
    R1 = np.linalg.norm(r1)

    c = np.linalg.norm(r1 - r0)
    s = (R0 + R1 + c) / 2

    a_min = s / 2 # a_min = (r1 + r2 + c)/4 = s/2
    a_max = 20 * a_min # a_max >> a_min

    long_arc = False

    # a_min is longest flight time on short branch
    t_max_short_path = lagrange_eq(a=a_min, mu=mu, s=s, c=c)
    if t_max_short_path < dt:
        print("USING LONG ARC")
        long_arc = True

    lagrange = partial(
        lagrange_eq, mu=mu, s=s, c=c, long_arc=long_arc)

    a = bisect(lagrange, a=a_min, b=a_max, target=dt)

    alpha = calc_alpha(a=a, s=s, long=long_arc)
    beta = calc_beta(a=a, s=s, c=c)
    v1, v2 = calc_velocity(r0=r0, r1=r1, rc=r1-r0, a=a,
                          alpha=alpha, beta=beta, mu=mu)

    return (a, v1, v2)

if __name__ == "__main__":
    # Example positions at (1, 0) and (1, 0)
    R0 = np.array([1, 0])
    R1 = np.array([0, 1])
    dt = 2
    mu = 4*(np.pi**2)

    a, v1, v2 = solve_lambert(R0, R1, dt, mu)
    print("a = %s, v1 = %s, v2 = %s" % (a, v1, v2))

    if plt is not None:
        plot_lambert(R0, R1, a)

```

Literatur

- [Alb19] Alain Albouy. „Lambert’s theorem: geometry or dynamics?“ In: *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 131.9 (2019), S. 1–30. DOI: 10.1007/s10569-019-9916-2. URL: <https://arxiv.org/pdf/1711.03049.pdf> (siehe S. 4, 5).
- [Bat99a] Richard H. Battin. „An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics; Revised Edition“. Englisch. In: Hrsg. von J. S. Przemieniecki. IAAA, 1999. Kap. 6, S. 282. ISBN: 1-56347-342-9. DOI: 10.2514/4.861543 (siehe S. 7).
- [Bat99b] Richard H. Battin. „An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics; Revised Edition“. Englisch. In: Hrsg. von J. S. Przemieniecki. IAAA, 1999. Kap. 6, S. 277 f., 287 f. ISBN: 1-56347-342-9. DOI: 10.2514/4.861543 (siehe S. 21).
- [Bat99c] Richard H. Battin. „An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics; Revised Edition“. Englisch. In: Hrsg. von J. S. Przemieniecki. IAAA, 1999. Kap. 6, S. 242 ff., 280. ISBN: 1-56347-342-9. DOI: 10.2514/4.861543 (siehe S. 27).
- [BMW71] Roger R. Bate, Donald D. Mueller und Jerry E. White. „Fundamentals of Astrodynamics“. Englisch. In: New York: Dover Publications, 1971. Kap. 5.4. ISBN: 0-486-60061-0 (siehe S. 6).
- [Bri21] The Editors of Encyclopaedia Britannica. *Johann Heinrich Lambert*. Englisch. [Online; Mit Internet Archive erfasst; letzter Aufruf: 4. November 2021]. 2021. URL: <http://web.archive.org/web/20211104132310/https://www.britannica.com/biography/Johann-Heinrich-Lambert> (siehe S. 5).
- [BS04] Steven P. Burns und Jeff J. Scherock. „Lambert Guidance Routine Designed to Match Position and Velocity of Ballistic Target“. Englisch. In: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 27.6 (2004), S. 989–996. DOI: 10.2514/1.1679 (siehe S. 10).
- [Cur21a] Howard D. Curtis. „Orbital Mechanics for Engineering Students; Revised Fourth Edition“. Englisch. In: Elsevier, 2021. Kap. 3.4 Elliptical orbits. ISBN: 978-0-12-824025-0 (siehe S. 12).
- [Cur21b] Howard D. Curtis. „Orbital Mechanics for Engineering Students; Revised Fourth Edition“. Englisch. In: Elsevier, 2021, S. 74. ISBN: 978-0-12-824025-0 (siehe S. 16).
- [Gau09] Carl Friedrich Gauss. *Theoria Motus Corporum Coelestium In Sectionibus Conicis Solem Ambientum (Theorie der Bewegung von Himmelskörpern, die in Kegelschnitten die Sonne umlaufen)*. Lateinisch. Hamburg: Perthes, F. et Besser, I. H., 1809, S. 120 f. URL: https://archive.org/details/bub_gb-ORUOAAAAQAAJ/page/n135/ (siehe S. 5, 7, 21).
- [HIL16] Daniel Hennes, Dario Izzo und Damon Landau. „Fast approximators for optimal low-thrust hops between main belt asteroids“. In: *2016 IEEE Symposium Series on Computational Intelligence (SSCI)*. 2016, S. 1–7. DOI: 10.1109/SSCI.2016.7850107 (siehe S. 10).
- [Hor06] Werner Horn. *The three anomalies (Die drei Anomalien)*. Englisch. [Online; Mit Internet Archive erfasst; letzter Aufruf: 29. Oktober 2021]. 2006. URL: <https://web.archive.org/web/20210506223617/http://www.csun.edu/~hcmt017/master/node14.html> (siehe S. 12).
- [Jor64] James F. Jordan. *The Application of Lambert’s Theorem to the Solution of Interplanetary Transfer Problems*. Englisch. Techn. Ber. [Online; Mit Internet Archive erfasst; letzter Aufruf: 16. Oktober 2021]. JPL/Caltech, 1964. URL: <http://web.archive.org/web/20211016182744/http://www.gravityassist.com/IAF1/Ref.%201-77.pdf> (siehe S. 8, 25).

- [Lag69] J.-L. Lagrange. *Œuvres de Lagrange, Tome Quatrième. Sur le problème de la détermination des orbites des comètes d'après trois observations*. Französisch. Hrsg. von M. J.-A. Serret. Paris: Gauthier-Villars, 1869. URL: <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k229223s/f441> (siehe S. 4).
- [Lam02] Johann H. Lambert. *Abhandlungen zur Bahnbestimmung der Cometen*. Übers. von J. Bauschinger. Leipzig: Verlag von Wilhelm Engelmann, 1902, S. 102. URL: <https://archive.org/details/jhlambertsabhan01goog/> (siehe S. 4). Übers. von *Insigniores orbitae Cometarum proprietates*. Lateinisch. Augsburg, 1772.
- [LJ16] Chieh-Min Liu und Jyh-Ching Juang. „Orbit transfer from earth to mars using modified Lambert algorithm“. Englisch. In: *2016 International Automatic Control Conference (CACS)*. 2016, S. 155–160. DOI: 10.1109/CACS.2016.7973901 (siehe S. 10).
- [Mac05] Sara Jean MacLellan. „Orbital rendezvous using an Augmented Lambert Guidance scheme“. Englisch. [Online; Mit Internet Archive erfasst; letzter Aufruf: 29. Oktober 2021]. Diss. Massachusetts Institute of Technology, 2005. URL: <http://web.archive.org/web/20211104170120/https://core.ac.uk/download/pdf/4399403.pdf> (siehe S. 10).
- [New26] Isaac Newton. „Philosophiae Naturalis Principia Mathematica“. Lateinisch. In: London: Apud Guil. & Joh. Innys, 1726, S. 492. URL: https://archive.org/details/CHEPFL_LIPR_AXB39/page/492/ (siehe S. 4).
- [OR04] J. J. O'Connor und E. F. Robertson. *Johann Heinrich Lambert*. Englisch. [Online; Mit Internet Archive erfasst; letzter Aufruf: 4. November 2021]. 2004. URL: <http://web.archive.org/web/20211030212440/https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lambert/> (siehe S. 5).
- [Pee21] Matthew M. Peet. *Lecture 10: Rendezvous and Targeting - Lambert's Problem*. AEE 462: Spacecraft Dynamics and Control. [Online; Mit Internet Archive erfasst; letzter Aufruf: 4. November 2021]. Arizona State University, 2021. URL: <https://web.archive.org/web/20211104222844/http://control.asu.edu/Classes/MAE462/462Lecture10.pdf> (siehe S. 6, 7).
- [Ree07] Mary Rees. *Trigonometric Identities (Trigonometrische Identitäten)*. Englisch. [Online; Mit Internet Archive erfasst; letzter Aufruf: 29. Oktober 2021]. 2007. URL: <http://web.archive.org/web/20211029205252/https://www.liverpool.ac.uk/~maryrees/homepagemath191/trigid.pdf> (siehe S. 18, 20).
- [Ric20] Steven L. Rickman. *Introduction to Orbital Mechanics and Spacecraft Attitudes for Thermal Engineers*. Englisch. [Online; Mit Internet Archive erfasst; letzter Aufruf: 1. November 2021]. NASA, 2020. URL: <http://web.archive.org/web/20210318005938/https://tfaws.nasa.gov/wp-content/uploads/Rickman-Presentation.pdf> (siehe S. 14).
- [Str17] Heinz K. Strick. *Johann Heinrich Lambert (1728–1777)*. [Online; Mit Internet Archive erfasst; letzter Aufruf: 4. November 2021]. 2017. URL: <http://web.archive.org/web/20200817222636/https://www.spektrum.de/wissen/johann-heinrich-lambert-1728-1777/1495847> (siehe S. 5).
- [TF21] David de la Torre Sangrà und Elena Fantino. „Review of Lambert's problem“. In: *ArXiv abs/2104.05283* (2021). URL: <https://arxiv.org/pdf/2104.05283.pdf> (siehe S. 3, 5).
- [Vol80] Otto Volk. „Johann Heinrich Lambert and the determination of orbits for planets and comets“. In: *Celestial mechanics* 21.2 (1980), S. 237–250. DOI: 10.1007/BF01230902. URL: <http://articles.adsabs.harvard.edu/pdf/1980CeMec...21...237V> (siehe S. 4).

Danksagung

Dieses Dokument wurde mit TeX Live erstellt, einer freien Implementierung von L^AT_EX für Unix-Systeme. Zusätzlich wurde das freie Literaturverwaltungsprogramm bibl_atex eingesetzt.

Als Layout wird eine Adaptation des L^AT_EX Templates `arxiv-style` verwendet, welches unter der MIT Lizenz frei auf Github verfügbar ist.

Lizenz

Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons „Namensnennung – Nicht-kommerziell – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International“ Lizenz.

