Lamberts Problem

Ulysse McConnell
W-Seminar Himmelsmechanik u. Raumfahrt
8. Februar 2022

Kurzfassung: Bahnbestimmung zwischen zwei Punkten und einer zugehörigen Flugzeit.

1 Problemstellung:

Es soll eine Flugbahn um einen Zentralkörper gefunden werden, welche die zwei Punkte R_1 und R_2 in einem gegebenen Zeitintervall Δt verbindet.

Hierbei handelt es sich um die Lösung des Zweikörperproblems mit einer vernachlässigbaren Satellitenmasse.

Johann Lambert formulierte das Problem ursprünglich bezüglich der Zeit auf Kometenbahnen, die aus den anderen Parametern bestimmt werden sollte. In der modernen Himmelsmechanik bezeichnet Lamberts Problem aber die Bahn- und nicht die Flugzeitbestimmung.

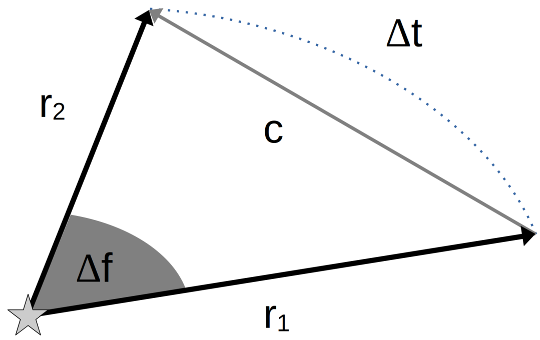

Abbildung 1: Geometrie des Problems

1.1 Parameter

Aus den Positionsvektoren $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ lassen sich zwei Parameter zur Lösung des Problems definieren:

- Sehne: $c^2 = ||\vec{r}_2 - \vec{r}_1||^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\Delta f)$ (Kosinussatz)
- Semiperimeter (Halber Umfang): $s = 0.5 \cdot (r_1 + r_2 + c)$

1.2 Geschichte

Lamberts Problem ist nach dem schweizer Mathematiker, Physiker, Astronom und Philosoph **Johann Heinrich Lambert** (∗ 1728, Mühlhausen - † 1777, Berlin) benannt. Das Problem wurde zuerst in Lamberts „*Abhandlungen zur Bahnbestimmung der Cometen*“ erwähnt. Zuvor hatten sich bereits viele Wissenschaftler, unter anderem Newton und Euler, mit der Bahnbestimmung von Kometen beschäftigt.

Das Problem wurde zuerst vom Mathematiker Joseph-Louis Lagrange rigoros Bewiesen, später folgten andere wie Carl Friedrich Gauß. Seit dem Beginn des Wettlaufs ins All hat Lamberts Problem wieder an Bedeutung gewonnen (siehe Abschnitt 2.4).

2 Lösung

Die erste Lösung stammt vom Mathematiker Joseph-Louis Lagrange, heutzutage gibt es viele unterschiedliche Lösungsansätze. Die Gleichung von Lagrange:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \cdot [(\alpha - \beta) - (\sin\alpha - \sin\beta)] \tag{1}$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{s}{2a}} \qquad \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{s-c}{2a}}$$

Durch das Aufstellen dieser Gleichung wurde Lamberts ursprüngliche Problemstellung bewiesen. Zur Bahnbestimmung muss aber die große Halbachse a gefunden werden.

2.1 Numerische Näherung

Die Umkehrung der Lagrange-Gleichung zur Bestimmung der großen Halbachse ist nicht trivial. Hierfür wird ein numerisches Näherungsverfahren benötigt. Es bietet sich die Bisektion (Intervallhalbierung) an.

Dabei ist zu beachten, dass es für die meisten großen Halbachsen vier mögliche Lösungen gibt (siehe Konstruktion im Abschnitt 2.2), wie in Abbildung 2 deutlich wird.

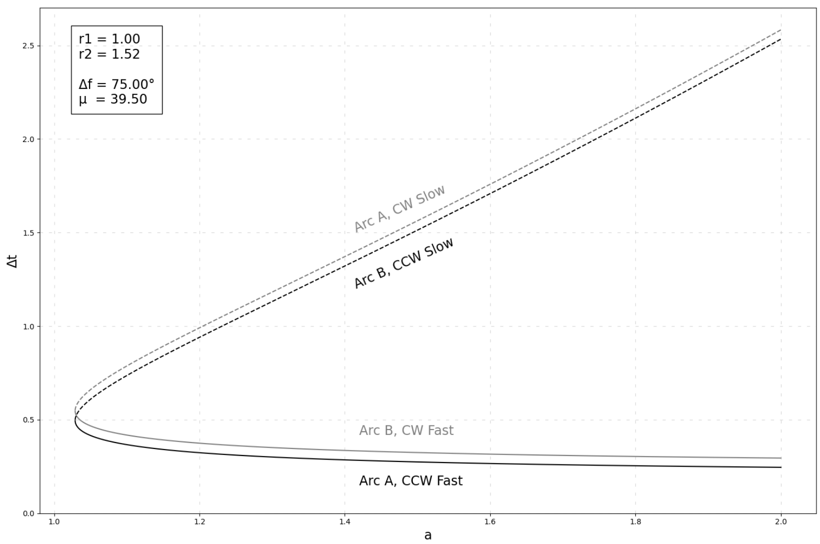

Abbildung 2: Graphischer Verlauf der Lagrange-Gleichung

2.2 Konstruktion

Aus einer bestimmten großen Halbachse a kann die Transferellipse konstruiert werden. Dabei wird die Ellipseneigenschaft der konstanten Brennpunktabstandssumme $\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$ ausgenutzt.

Der gesuchte leere Brennpunk F' kann durch den Schnittpunkt zweier Kreise um die Punkte R_1 und R_2 mit jeweiligem Radius $r = 2a - r_n$ gefunden werden. Der andere Brennpunkt F ist im Zentralkörper.

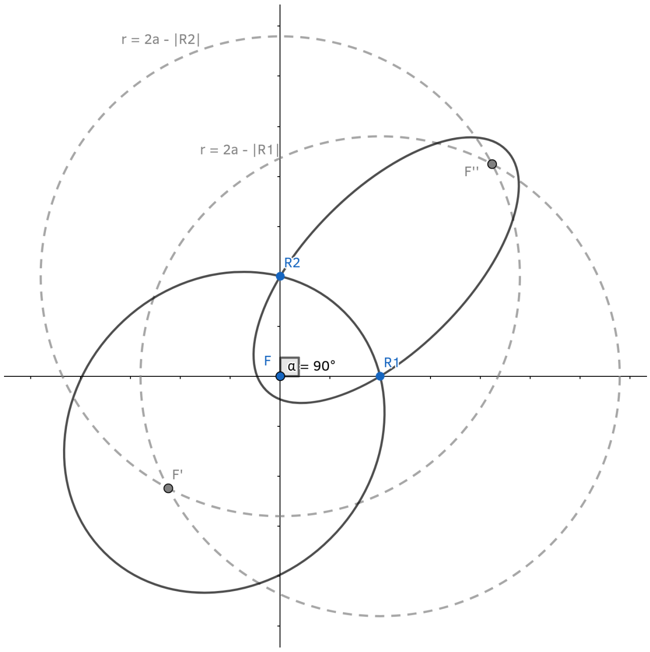

Abbildung 3: Konstruktion der Transferellipsen anhand der großen Halbachse a

Eine interaktive Version dieser Graphik ist im Internet auf GeoGebra unter folgender URI abrufbar: https://www.geogebra.org/m/w4uycw6x

Aus Abbildung 3 lassen sich vier mögliche Fälle unterscheiden:

- Keine Schnittpunkte: Transfer in vorgegebener Zeit ist nicht möglich
- Unendlich viele Schnittpunkte: Ausgangs- und Endpunkt sind gleich
- Ein Schnittpunkt: Kleinstmögliche Transferellipse $a = \frac{1}{4}(r_1 + r_2 + c)$
- Zwei Schnittpunkte: Vier mögliche Transfers (Zwei Flugrichtungen $\times$ Zwei Ellipsen)

2.3 Geschwindigkeit

Die benötigte Startgeschwindigkeit zur Durchführung des Transfers ist durch die Geschwindigkeit auf der Transferellipse am Punkt R_1 gegeben. Diese lässt sich über die vis-viva-Gleichung berechnen:

$$\Delta v_{start} = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{a} \right)} - v_{vorhanden} \tag{2}$$

2.4 Anwendung

- Planung interplanetarer Flüge
- Planung Rendezvous-Manöver
- Raketenabwehr
- ...

umcconnell.net/
lamberts-problem